

DER STAHLBAU

SCHRIFTLEITUNG: PROF. DR.-ING. DR.-ING. E.h.K. KLÖPPEL · DARMSTADT
VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN BERLIN-WILMERSDORF

Heft 9 — September 1959



OK
ELEKTRODEN
Kjellberg-Esab GmbH
Salzingen

Überall zu Hause

DER STAHLBAU

Schriftleitung:

Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Kurt Klöppel,
Darmstadt, Technische Hochschule

Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin-Wilmersdorf,
Hohenzollerndamm 169, Ruf: 87 15 56

28. Jahrgang

Berlin, September 1959

Heft 9

Inhalt

Seite

Eßlinger, Maria, Dr.-Ing., Düsseldorf: Aussteifungsringe
von Druckrohrleitungen 233

Kapucuoglu, R., Dipl.-Ing., Ankara: Lösung unsym-
metrisch räumlicher Stabsysteme nach dem Form-
änderungsgrößenverfahren insbesondere unter Ver-
wendung kinematischer Ketten für die virtuellen
Verschiebungszustände 239

Witte, Horst, Dipl.-Ing., Darmstadt: Beuluntersuchung
für eine orthotrope Platte mit Hohlsteifen unter
Schub und Druckbelastung 249

Troeblst, C. Christian, New York: Bogenbrücke über den
Glen Canyon 253

Fröhlich, J., Dipl.-Ing., Düsseldorf: Oktaplatte in Rohr-
konstruktion 255

Feder, Diethelm, Dipl.-Ing., Bethlehem: Die Fairchild-
Aluminium-Brücke 257

Verschiedenes:

Lacher, G., Dipl.-Ing., Darmstadt: Pavillon Marie Thumas
auf der Weltausstellung 1958 in Brüssel 259

Persönliches 260

Bezugsbedingungen

Vierteljährlich 7,50 DM (Ausland nur ganzjährlich 30,— DM), Einzelheft
3,— DM und Zustellgeld. Monatlich ein Heft, Bezugspreis im voraus zahl-
bar. Bestellungen nimmt jede Buchhandlung und jede Postanstalt oder
der Verlag entgegen. Postscheckkonto: Berlin-West 16 88. Abbestellungen
einen Monat vor Schluß des Kalendervierteljahres.

Bestellungen für das Ausland sind zu richten

für Österreich an Rudolf Lechner & Sohn, Wien I/1, Seilerstätte 5,

für die Schweiz an Verlag für Wissenschaft, Technik und Industrie AG.,
Basel, Schützenmattstraße 43,

für Italien an Libreria Commissionaria Sansoni, Firenze, Via Gino
Capponi 26,

für das gesamte übrige Ausland und Übersee an I. R. Maxwell & Co. Ltd.,
London W 1, 4/5 Fitzroy Square.



Die Entwicklung der Schweißtechnik

führt zur fortlaufenden Verbesserung unserer

Fabrikate · Verwenden Sie deshalb bei Ihren

Schweißarbeiten

Metallogen
ELEKTRODEN



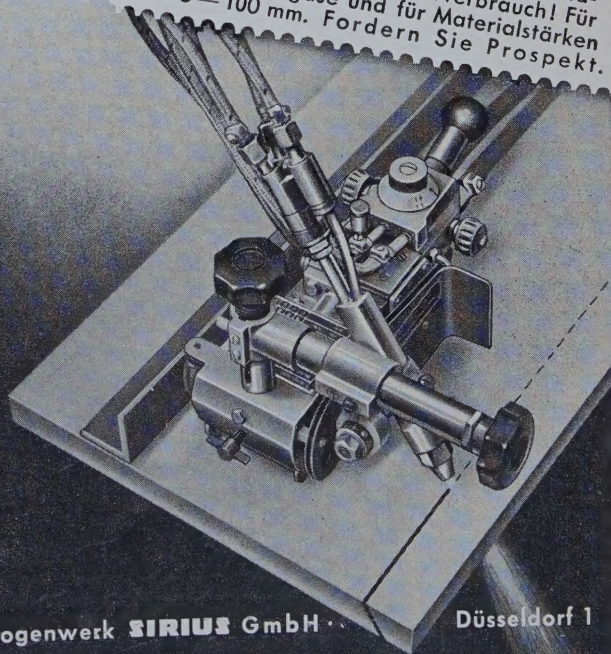
Metallogen

W A T T E N S C H E I D

Wir suchen in verschiedenen Bezirken weitere Fachvertreter u. Wieder-
verkäufer zu günst. Bedingungen. Anfragen erbitten wir direkt an uns.

SIRIUS „Oxy-Motor“

Weltbekannte und bewährte
Universal-Schneidmaschine DP.
Ohne Elektromotor! Selbsttätiger Vor-
schub, stufenlos regelbar durch Schneid-
sauerstoffdruck, ohne Mehrverbrauch! Für
sämtliche Heizgase und für Materialstärken
von 5—100 mm. Fordern Sie Prospekt.



Autogenwerk **SIRIUS** GmbH

Düsseldorf 1

Klare Rechnung:



Mit der Spannweite

wachsen auch die Preisvorteile, die sich bei der Verwendung von geschweißten Stahlrohrkonstruktionen ergeben. Die elektrische Schmelzschiweißung ermöglicht Rohrnotenpunkte mit einem Gütegrad von 100%. Gewichtsersparnis bis zu 50%, niedrige Transportkosten, geringer Montageaufwand, einfache Unterhaltung, weitgehende Unempfindlichkeit gegen Korrosion – das sind die Gründe für die hohe Wirtschaftlichkeit der Stahlrohrbauweise.



MANNESMANN AG

Düsseldorf

Aussteifungsringe von Druckrohrleitungen

Von Dr.-Ing. Maria Eßlinger, Düsseldorf

DK 627.844 : 693.81

1. Einleitung

Druckrohrleitungen werden im allgemeinen über Stützringe auf Betonsockeln gelagert. Zwischen den kräftigen Stützringen können noch leichte Aussteifungsringe vorgesehen sein.

Die obere Grenze für den Ringabstand ist durch die zulässigen Spannungen und die Beulsicherheit gegeben. Wir wollen uns hier auf die Berechnung der Spannungen beschränken. Dabei unterscheidet man zweckmäßig zwischen Membran- und Biegespannungen.

Membranspannungen sind annähernd gleichmäßig über die Wanddicke verteilt und verbiegen infolgedessen den Rohrmantel in erster Näherung nicht. Im vorliegenden Fall sind es die linear

über die Höhe verteilten Längsspannungen $\sigma = \frac{M}{W}$ und die zugehörigen, sinusförmig über den Umfang verteilten Schubspannungen $\tau = \frac{Q}{\pi \cdot r \cdot s}$.

Biegespannungen sind linear abfallend über die Wanddicke verteilt und verbiegen infolgedessen den Rohrmantel. Im vorliegenden Fall sind es alle Krafteinleitungsspannungen. Dabei sind zwei Lastfälle zu unterscheiden:

1. Am unversteiften Rohr wird das Wassergewicht in die Rohrschale eingeleitet.
2. An den Aussteifungsringen werden die Deformationen verhindert.

2. Verbiegung durch das Wassergewicht bei teilweiser Füllung

2.1 Rohrschale

2.1.1 Rahmenrechnung

Wir denken uns aus dem unversteiften Rohr einen Ring von 1 cm Breite herausgeschnitten und betrachten das Gleichgewicht der

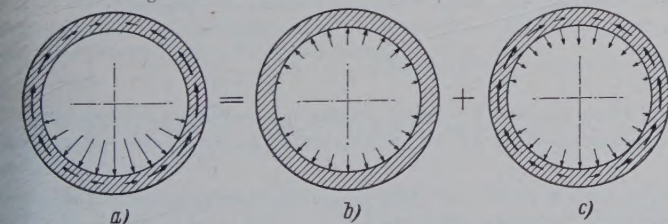


Bild 1. Belastung des unversteiften Rohrmantels durch den Wasserdruck

Kräfte in Ringebene (Bild 1). Der Ring wird von innen durch den Wasserdruck und längs der Schnittrufer durch den sinusförmig verteilten Schubfluß belastet.

$$\left. \begin{aligned} u &= \left[e^{\alpha_1 \cdot \frac{x}{r}} \left(A_1 \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + A_2 \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} \right) + e^{-\alpha_1 \cdot \frac{x}{r}} \left(A_3 \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + A_4 \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{\alpha_2 \cdot \frac{x}{r}} \left(A_5 \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + A_6 \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} \right) + e^{-\alpha_2 \cdot \frac{x}{r}} \left(A_7 \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + A_8 \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} \right) \right] \cos n \varphi, \\ v &= \left[e^{\alpha_1 \cdot \frac{x}{r}} \left(B_1 \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + B_2 \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} \right) + e^{-\alpha_1 \cdot \frac{x}{r}} \left(B_3 \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + B_4 \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{\alpha_2 \cdot \frac{x}{r}} \left(B_5 \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + B_6 \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} \right) + e^{-\alpha_2 \cdot \frac{x}{r}} \left(B_7 \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + B_8 \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} \right) \right] \sin n \varphi, \\ w &= \left[e^{\alpha_1 \cdot \frac{x}{r}} \left(C_1 \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + C_2 \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} \right) + e^{-\alpha_1 \cdot \frac{x}{r}} \left(C_3 \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + C_4 \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} \right) + \right. \\ &\quad \left. + e^{\alpha_2 \cdot \frac{x}{r}} \left(C_5 \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + C_6 \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} \right) + e^{-\alpha_2 \cdot \frac{x}{r}} \left(C_7 \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + C_8 \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} \right) \right] \cos n \varphi. \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

Zerlegen der Belastung in Symmetrie und Antimetrie gibt zwei einfache Gleichgewichtsgruppen. Die antimetrische Gleichgewichtsgruppe beansprucht das Rohr nicht auf Biegung. Bei der symmetrischen Belastung entstehen Biegemomente; sie wachsen beim Füllen von Null aus langsam an, erreichen im halbgefüllten Rohr ihr Maximum und gehen beim vollständig gefüllten Rohr wieder auf Null zurück.

Eine einfache Rahmenrechnung ergibt, daß das größte Biegemoment beim halbgefüllten Rohr am waagrechten Durchmesser auftritt und

$$M = 0,075 \cdot \gamma \cdot r^3 \dots \dots \dots (1)$$

beträgt; dabei bedeutet γ das spezifische Gewicht der Füllung und r den Rohrradius. Für ein wassergefülltes Rohr mit 200 cm Radius und 1 cm Wanddicke gilt

$$M = 0,075 \cdot 10^{-3} \cdot 200^3 = 600 \text{ cm kg/cm,}$$

$$\sigma = \frac{6 M}{s^2} = 6 \cdot \frac{600}{1^2} = 3600 \text{ kg/cm}^2.$$

Das ist nur eine obere Grenze der möglichen Spannung. Der wirkliche Wert ist viel kleiner, denn bei dieser Übersichtsrechnung war die aussteifende Wirkung der Ringe nicht berücksichtigt.

2.1.2 Schalenrechnung

Lösung der Differentialgleichung

Die Biegetheorie der Kreiszylinderschalen steht ausführlich und leicht verständlich in dem Buch „Statik und Dynamik der Schalen“ von Flügge [1]. Bild 2 gibt eine Zusammenstellung der Bezeichnungen die dort und in der hier folgenden Rechnung verwendet werden.

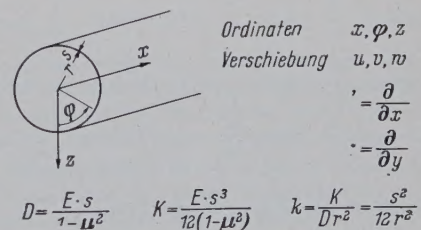


Bild 2. Bezeichnungen der Schalentheorie

Flügge stellt drei partielle Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten für die drei Verschiebungen u, v, w auf und gibt für geschlossene Rohrschalen die Lösung an:

Dabei sind α_i und β_i Konstante, die aus der charakteristischen Gleichung berechnet werden, n ist die Periode über den Umfang, eine beliebige ganze Zahl, C_i sind freie Integrationskonstante, die durch die Grenzbedingungen bestimmt sind und A_i und B_i sind gebundene Integrationskonstante, abhängig von C_i , α_i , β_i und n .

Die Deformationen verlaufen periodisch über den Umfang. Wenn wir diese Lösung der Differentialgleichung für unser Problem verwenden wollen, muß die Belastung des Rohrmantels in eine Fourierreihe zerlegt werden. Für den Wasserdruck gemäß Bild 1b gilt

$$P = \frac{2\gamma r}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cos 2\varphi - \frac{1}{15} \cos 4\varphi + \frac{1}{35} \cos 6\varphi - \frac{1}{63} \cos 8\varphi + \dots \right] \quad (3)$$

Um festzustellen, wieviele Glieder der Reihe berücksichtigt werden müssen, wird auch die Momentenfläche am Rahmen entsprechend zerlegt.

$$M = \frac{2\gamma r^3}{\pi} \left[-\frac{1}{3^2} \cos 2\varphi + \frac{1}{15^2} \cos 4\varphi - \dots \right] \quad (4)$$

Das ergibt für den waagrechten Durchmesser $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$$M = \gamma r^3 [+0,07074 + 0,00283 + 0,00052 + 0,00016 \dots] = 0,075 \gamma r^3. \quad (5)$$

Die Reihe konvergiert so gut, daß es genügt, mit dem ersten Glied weiterzurechnen.

Somit haben wir folgende Aufgabe zu lösen (Bild 3a): Eine unendlich lange Rohrleitung, die im Abstand $2a$ durch Ringe aussteift ist, wird konstant über die Länge durch Innendruck belastet, der mit der Periode $\cos 2\varphi$ über den Umfang verteilt ist. Welche Biegespannungen erfährt der Rohrmantel zwischen den Ringen?

Festlegen der Grenzbedingungen

Bis jetzt haben wir, um die Rechnung übersichtlich und einfach zu gestalten, Belastungen zerlegt und vernachlässigt. Jetzt wollen wir Deformationen zerlegen und vernachlässigen.

Zuerst denken wir uns die Ringe fort und berechnen die über die ganze Länge konstanten Rohrdeformationen, die sich infolge

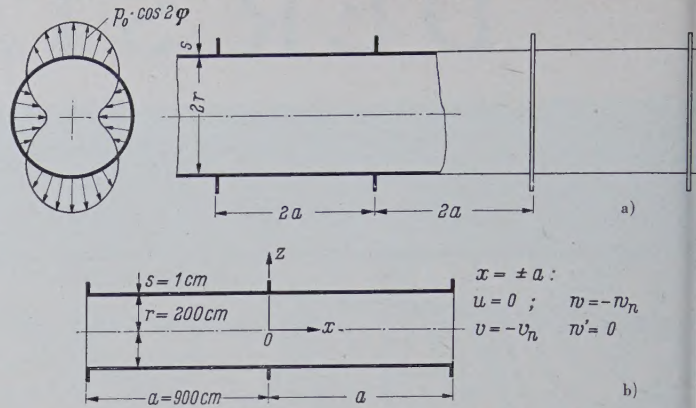


Bild 3. Aufgabenstellung für die Schalenrechnung
a) Biegebelastung des Rohrmantels
b) Grenzbedingungen

über der Rohrschale unendlich steif sind; das bedeutet, daß die Deformationen der Rohrschale an den Stellen, an denen Ringe sitzen, auf Null zurückgehen müssen. Für das Aufstellen der Randbedingungen ist weiterhin wichtig, daß bei der unendlich langen Rohrleitung an den Ringen und in der Mitte der Felder Symmetrie ebenen liegen.

Bild 3b zeigt die mathematisch formulierte Aufgabe. Für die Berechnung der acht freien Konstanten von Gleichung (2) sind acht Grenzbedingungen gegeben. Wenn die Integrationskonstanten und damit die Deformationen und ihre Ableitungen bekannt sind, können die Spannungen fast unmittelbar angeschrieben werden.

Bestimmen der Integrationskonstanten

Die acht freien Konstanten werden durch Ausnutzen der Symmetrie auf die Hälfte reduziert. Man faßt die e -Funktionen zu hyperbolischen Funktionen zusammen, führt neue Integrationskonstante a_i , b_i und c_i ein und bekommt damit eine Lösung der Differentialgleichung, die vier symmetrische Funktionen und vier antisymmetrische Funktionen enthält.

$$\left. \begin{aligned} u &= \left[a_1 \cdot \text{Cosh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + a_2 \cdot \text{Sinh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + a_3 \cdot \text{Sinh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + a_4 \cdot \text{Cosh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + \right. \\ &\quad \left. + a_5 \cdot \text{Cosh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + a_6 \cdot \text{Sinh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + a_7 \cdot \text{Sinh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + a_8 \cdot \text{Cosh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} \right] \cos n\varphi, \\ v &= \left[b_1 \cdot \text{Cosh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + b_2 \cdot \text{Sinh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + b_3 \cdot \text{Sinh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + b_4 \cdot \text{Cosh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + \right. \\ &\quad \left. + b_5 \cdot \text{Cosh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + b_6 \cdot \text{Sinh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + b_7 \cdot \text{Sinh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + b_8 \cdot \text{Cosh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} \right] \sin n\varphi, \\ w &= \left[c_1 \cdot \text{Cosh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + c_2 \cdot \text{Sinh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + c_3 \cdot \text{Sinh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + c_4 \cdot \text{Cosh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + \right. \\ &\quad \left. + c_5 \cdot \text{Cosh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + c_6 \cdot \text{Sinh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + c_7 \cdot \text{Sinh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + c_8 \cdot \text{Cosh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} \right] \cos n\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

der Belastung durch den Wasserdruck ergeben:

$$\left. \begin{aligned} w_n &= \frac{p \cdot r^4}{E \cdot s^3} \cdot \frac{12(1-\mu^2)}{(n^2-1)^2} \quad \mu = 0,3 = \text{Querkontraktion} \\ v_n &= -\frac{w_n}{n} \quad n = 2 = \text{Periode über den Umfang} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Nachdem die Rohrleitung sich frei verformt hat, denken wir uns die Ringe wieder aufgesetzt und nehmen dabei an, daß sie gegen-

Da im vorliegenden Fall System und Belastung symmetrisch sind, dürfen die Integrationskonstanten c_3 , c_4 , c_7 und c_8 der antisymmetrischen Funktionen von vornherein gleich Null gesetzt werden; die gebundenen Integrationskonstanten a_i und b_i reduzieren sich entsprechend.

Die symmetrische Lösung der Differentialgleichung der Schalentheorie enthält nur noch vier freie Konstanten und lautet:

$$\left. \begin{aligned} u &= \left[a_3 \cdot \text{Sinh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + a_4 \cdot \text{Cosh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + \right. \\ &\quad \left. + a_7 \cdot \text{Sinh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + a_8 \cdot \text{Cosh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} \right] \cos n\varphi, \\ v &= \left[b_1 \cdot \text{Cosh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + b_2 \cdot \text{Sinh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + \right. \\ &\quad \left. + b_5 \cdot \text{Cosh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + b_6 \cdot \text{Sinh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} \right] \sin n\varphi, \\ w &= \left[c_1 \cdot \text{Cosh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + c_2 \cdot \text{Sinh } \alpha_1 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_1 \cdot \frac{x}{r} + \right. \\ &\quad \left. + c_5 \cdot \text{Cosh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \cos \beta_2 \cdot \frac{x}{r} + c_6 \cdot \text{Sinh } \alpha_2 \cdot \frac{x}{r} \cdot \sin \beta_2 \cdot \frac{x}{r} \right] \cos n\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die Zahlenrechnung ergibt, daß die Konstanten c_1 und c_2 gegenüber c_5 und c_6 winzig klein sind. Das ist kein Zufall. Wir erkennen darin eine statische Gesetzmäßigkeit, die für eine weitere Vereinfachung der Rechnung ausgenützt werden kann.

Gleichung (8) enthält zwei verschiedene Abklinggeschwindigkeiten. Bei dem durchgerechneten Zahlenbeispiel ist

$$\alpha_1 = 18,2847 \text{ und } \alpha_2 = 0,09573,$$

d. h. es gibt eine schnell und eine langsam abklingende Funktion. Aus dem schematisch dargestellten Verlauf der beiden Lösungsteile (Bild 4) erkennt man, daß die schnell abklingende Funktion zwar

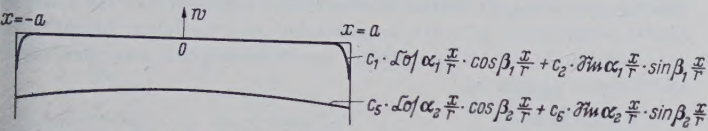


Bild 4. Verlauf der beiden Lösungsanteile

an den Aussteifungsringen wichtig, in der Mitte der Felder aber vernachlässigbar ist. Für die Berechnung der tangentialen Biegespannungen in der unversteiften Rohrschale dürfen die Integrationskonstanten c_1 und c_2 gleich Null gesetzt werden.

Wenn wir zwei Integrationskonstanten vernachlässigen, müssen wir auch auf zwei Randbedingungen verzichten. Die schnell abklingende Funktion erfüllt die Deformationsbedingungen senkrecht zur Schalenfläche $w = -w_n$ und $w' = 0$; diese beiden Bedingungen entfallen bei der weiteren Rechnung.

Die Konstanten c_5 und c_6 werden aus den Randbedingungen $u = 0$ und $v = -v_n$ berechnet.

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_5}{w_n} &= -\frac{1}{n} \cdot \frac{\omega \cdot \cosh \alpha a \cdot \sin \beta a - v \cdot \sinh \alpha a \cdot \cos \beta a}{(\delta \cdot v - \varepsilon \cdot \omega) \cdot \sinh \alpha a \cdot \cosh \alpha a - (\delta \cdot \omega + \varepsilon \cdot v) \cdot \sin \beta a \cdot \cos \beta a} \\ \frac{c_6}{w_n} &= -\frac{1}{n} \cdot \frac{-\omega \cdot \sinh \alpha a \cdot \cos \beta a - v \cdot \cosh \alpha a \cdot \sin \beta a}{(\delta \cdot v - \varepsilon \cdot \omega) \cdot \sinh \alpha a \cdot \cosh \alpha a - (\delta \cdot \omega + \varepsilon \cdot v) \cdot \sin \beta a \cdot \cos \beta a} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wobei

$$\alpha + \beta_i = \lambda = 0,388982 n \sqrt{\frac{s}{r} (n^2 - 1) (1 + i)}, \quad \dots \quad (9a)$$

$$-\omega + v_i = \frac{\lambda (\lambda^2 \mu + n^2)}{(\lambda^2 - n^2)^2}, \quad \dots \quad (9b)$$

$$+ \delta - \varepsilon_i = \frac{n [\lambda^2 (2 + \mu) - n^2]}{(\lambda^2 - n^2)^2} \text{ ist.} \quad \dots \quad (9c)$$

Deformationen

Die Durchbiegung an der Stelle $x = 0$ ergibt sich aus der Überlagerung der Durchbiegung der unversteiften Rohrschale $w = w_n$ mit dem Ergebnis der Schalenrechnung $w = c_5$ zu

$$w = w_n + c_5. \quad \dots \quad (10)$$

Der Abminderungsfaktor, der angibt, welcher Restanteil der Durchbiegung des unversteiften Rohres durch die Aussteifungsringe nicht aufgehoben wird, ist

$$\kappa = \frac{w_n + c_5}{w_n} = 1 + \frac{c_5}{w_n}. \quad \dots \quad (11)$$

Spannungen

Die Biegemomente sind den Durchbiegungen proportional; deswegen gilt für das tangential Biegemoment im Rohrmantel unter Benutzung von Gleichung (1) und (11) näherungsweise

$$M = \kappa \cdot 0,075 \cdot \gamma \cdot r^3.$$

Bei unserem Zahlenbeispiel ist der Abminderungsfaktor $\kappa = 0,00778$ und damit die Biegespannung im Rohrmantel

$$\sigma = 0,00778 \cdot 3600 = 28 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Wert ist vernachlässigbar klein.

Bild 5 zeigt den Abminderungsfaktor κ in Abhängigkeit vom dimensionslosen Stützringabstand $\frac{a}{r}$ für ein Rohr mit $r/s = 200$. Die tangentialen Biegespannungen werden erst gefährlich, wenn der Abstand der Aussteifungsringe ungefähr 15mal so groß ist wie der Durchmesser.

Bei der Berechnung der axialen Biegespannungen am Ring darf die schnell abklingende Spannungsfunktion nicht mehr vernachlässigt werden. Man berechnet nach dem soeben beschriebenen Verfahren die vier Integrationskonstanten c_1 , c_2 , c_5 und c_6 und

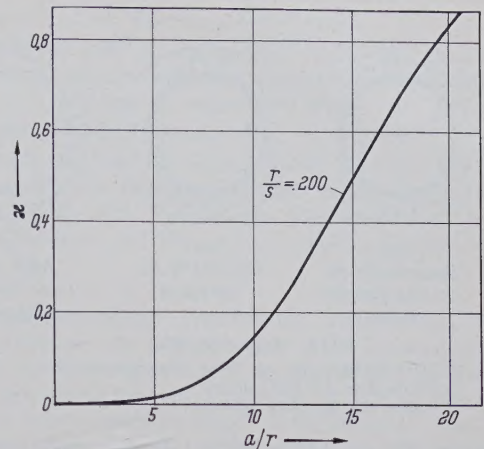


Bild 5. Abminderungsfaktor für tangential Biegespannungen

kennt damit alle Deformationen und ihre Ableitungen. Diese Werte werden, überlagert mit den Deformationen des ringlosen Rohres, in die Formeln für die inneren Kräfte [1] eingesetzt

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \frac{D}{r} \left[(v' + w + \mu \cdot u') + \frac{K}{r^3} \cdot w (1 - n^2) \right], \\ M_\varphi &= \frac{K}{r^2} (w + w'' + \mu \cdot w''), \\ N_x &= \frac{D}{r} (u + \mu \cdot v' + \mu \cdot w) - \frac{K}{r^3} \cdot w', \\ M_x &= \frac{K}{r^2} (w'' + \mu \cdot w'' - u' + \mu \cdot v'). \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (13)$$

Mit den Zahlenwerten unseres Beispiels ergibt sich für die Biegespannungen am Ring, die die Erzeugende der Rohrschale verbiegen,

$$\sigma = \frac{6 M}{s^2} = 160 \text{ kg/cm}^2.$$

Die Spannung ist klein, aber doch größer als die tangential Biegespannung in Feldmitte. Das läßt sich damit erklären, daß es eine schnell abklingende Spitzenspannung ist, die keinen nennenswerten Beitrag zur Formänderungsarbeit liefert. Wahrscheinlich wird diese Störspannung durch den Abstand der Aussteifungsringe nur wenig beeinflußt.

2.2 Ringe

2.21 Belastung

Es sollen die Spannungen in den Ringen und im anschließenden Rohrmantel berechnet werden, die entstehen, wenn die Ringe durch die Kräfte belastet werden, die nach der vorhergehenden Rechnung an den unendlich steifen Ringen abgesetzt werden.

Wenn die Biegesteifigkeit der Rohrschale vernachlässigbar klein wäre und infolgedessen die ganze Biegebelastung an den Ringen angreifen würde, so würde dort entweder

$$\left. \begin{aligned} \text{die Radialbelastung } S_x &= p \cdot 2a \cdot \cos 2\varphi \\ \text{oder die Tangentialbelastung} \\ T_x &= \frac{\partial p}{\partial \varphi} 2a = 2 \cdot p \cdot 2a \cdot \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (14)$$

oder eine Kombination von beiden wirken.

Die genaue Berechnung der Ringbelastung wird nach dem gleichen Verfahren durchgeführt, das soeben für die Ermittlung der axialen Biegespannungen in der Rohrschale an den Ringen beschrieben wurde. Man berechnet die vier Integrationskonstanten c_1 , c_2 , c_5 und c_6 und kennt damit alle Deformationen und ihre Ableitungen. Diese Werte in die Formeln für die inneren Kräfte [1]

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \frac{K}{r^3} \cdot (w''' - u'' - \frac{3 - \mu}{2} \cdot v'), \\ T_x &= \frac{D}{a} \cdot (1 + 3k) \cdot \frac{1 - \mu}{2} \cdot v' \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (15)$$

eingesetzt, gibt mit den Zahlenwerten unseres Beispiels (Bild 6)

$$\left. \begin{aligned} S_x &= 0,142 p \cdot 2a \cos 2\varphi \\ T_x &= 1,766 p \cdot 2a \sin 2\varphi. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (16)$$

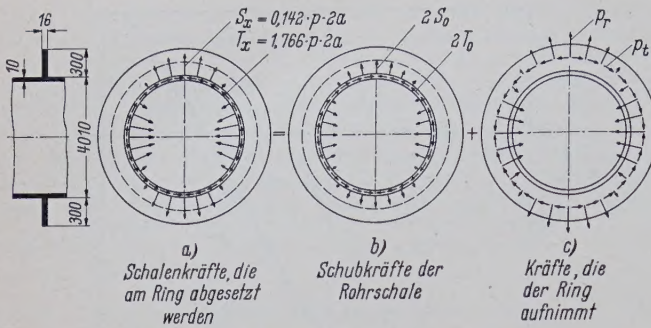


Bild 6. Kräfte am Ring
a) Schalenkräfte, die am Ring abgesetzt werden
b) Schubkräfte der Rohrschale
c) Kräfte, die der Ring aufnimmt

Diese Belastung ist um 2,5 % größer als der oben angegebene Grenzwert. Das läßt sich vielleicht damit erklären, daß die Deformationen in der Rohrschale nicht stetig abklingen, sondern in einer gedämpften Sinuslinie um den Mittelwert schwankend.

Man kann sich vorstellen, daß der örtliche Wasserdruck bei der Krafteinleitung in tangentialen Schub umgesetzt wird und in dieser Form durch die Rohrschale zu den Ringen wandert, weil das am wenigsten Formänderungsarbeit kostet. Erst kurz vor den Ringen tritt die schnell abklingende Lösung in Funktion; es werden die Randbedingungen $w = -w_n$ und $w' = 0$ erzwungen und dabei wird ein Teil der tangentialen Schubkraft in radialen Schub umgesetzt.

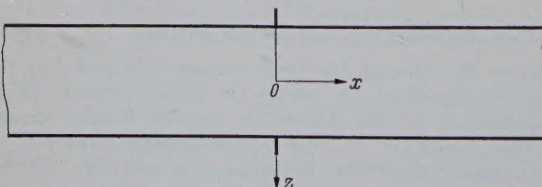
2.22 Statisch unbestimmte Rechnung Überblick

Beim ebenen Blech gibt es einfache Formeln für die mittragende Breite. Bei der Rohrschale hat der Begriff mittragende Breite keinen rechten Sinn. Wenn man analog zur Rechnung beim ebenen Blech sinusförmig verteilten tangentialen Schub am Rohr anbringt, die resultierende tangentiale Längskraft und die größte Dehnung berechnet und dann die mittragende Breite aus der Bedingung bestimmt, daß die gleiche Längskraft, gleichmäßig über einen Streifen von der mittragenden Breite verteilt, dort die gleiche Dehnung hervorrufen soll, so bekommt man für die mittragende Breite fantastisch günstige Werte, ein Vielfaches des Rohrdurchmessers; aber dieser Spannungszustand wäre mit riesengroßen Biegedeformationen verbunden, die der Aussteifungsring nie mitmachen könnte.

Tangentialer Schub allein kann nie auftreten. Zwischen Ring und Rohrschale wird immer tangentiale und radiale Schubkraft übertragen und man weiß von vornherein nicht, in welchem Verhältnis die beiden zueinander stehen. Die Aufgabe ist zweifach statisch unbestimmt. Wir berechnen die Verschiebungen v_0 und w_0 auf Mitte Rohrschale aus der Bedingung, daß die tangentialen und radialen Schubkräfte, bezogen auf Mitte Rohrschale, im Gleichgewicht sein müssen.

Schalenkräfte

Um die Rechnung zu vereinfachen und allgemeingültige Formeln zu bekommen, verlassen wir die bisher behandelte Konstruktion und gehen zu einem ideellen System über (Bild 7), einem unendlich



$x = 0: u = 0 \quad v = v_0 \quad w = w_0 \quad w' = 0$
Bild 7. Ideelles System für die Schalenrechnung

langen Rohr, auf dem ein Aussteifungsring sitzt. Es ist anzunehmen, daß es für die Beanspruchung der Ringe unter einer gegebenen äußeren Belastung ziemlich gleichgültig ist, ob die Aussteifungsringe 18 m oder 100 m Abstand haben.

Für die Berechnung der Deformationen dieses ideellen Systems verwendet man vorteilhaft Gleichung (2). Im Unendlichen müssen

alle Deformationen und Kräfte auf Null abgeklungen sein. Die Glieder mit $e^{-\alpha \frac{x}{r}}$ erfüllen diese Bedingung; die Glieder mit $e^{+\alpha \frac{x}{r}}$ müssen verschwinden, d. h. die Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3 und C_6 sind Null.

Die vier restlichen Integrationskonstanten C_3, C_4, C_7 und C_8 werden durch die Verschiebungen v_0 und w_0 ausgedrückt. Die Grenzbedingungen sind, unter Berücksichtigung der Symmetrie

$$x = 0: u = 0, \quad v = v_0, \quad w = w_0, \quad w' = 0.$$

Mit den Integrationskonstanten sind alle Deformationen und ihre Ableitungen bekannt. Diese Werte in die Formeln für die inneren Kräfte eingeführt, gibt die tangentialen und radialen Schubkräfte der Rohrschale am Ringanschluß in Abhängigkeit von den Verschiebungen v_0 und w_0 .

Ringkräfte

Es ist zweckmäßig, auch für die Berechnung der Ringkräfte die Flüggesche Biegetheorie der Kreiszyinderschalen zu benutzen. Aber hier gibt es keine Abklingfunktionen. Unser Gedankenmodell ist ein unendlich langes Rohr, das konstant über die ganze Länge durch die Tangentialkräfte $p_t \sin 2\varphi$ und die Radialkräfte $p_r \cos 2\varphi$ belastet wird und aus dem wir einen schmalen Ring eines Streifen von der Breite t des wirklichen Ringes, heraus schneiden (Bild 6).

Wir gehen auch hier von den sechs Gleichgewichtsbedingungen am Schalenelement aus und berücksichtigen dabei nicht nur die inneren Kräfte, sondern auch die äußeren Lasten p_t und p_r . Durch Eliminieren der Schubkräfte senkrecht zur Schalenfläche werden die sechs Gleichungen reduziert auf vier. Eine davon entfällt als Identität, weil sie nur die Gleichheit der Schubspannungen in der Schalenfläche enthält.

In den drei restlichen Gleichungen werden alle inneren Kräfte durch die Deformationen ausgedrückt und dann alle Ableitungen nach x gleich Null gesetzt, weil das Rohr über die ganze Länge konstant belastet und deformiert wird. Das bedeutet mathematisch, daß die Verschiebungen den einfachen Formeln gehorchen

$$\left. \begin{aligned} u &= u_r \cos n\varphi, \\ v &= v_r \sin n\varphi, \\ w &= w_r \cos n\varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

Die Differentiationen nach φ können ausgeführt werden. Damit entstehen drei einfache lineare Gleichungen für die drei Unbekannten u_r, v_r und w_r . Die erste lautet

$$u_r = 0 \dots \dots \dots (18)$$

Die beiden andern werden so umgeformt, daß die Belastungen p_t und p_r durch die Verschiebungen v_r und w_r ausgedrückt werden

$$\left. \begin{aligned} p_t &= \frac{D}{r^2} \cdot n [w_r + n \cdot v_r], \\ p_r &= \frac{D}{r^2} [(w_r + n \cdot v_r) + K \cdot w_r (n^2 - 1)^2] \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

Die Deformationen und Kräfte beziehen sich auf Schwerlinie Ring. Bevor wir die Bestimmungsgleichungen anschreiben können, müssen beide, Deformationen und Kräfte, auf Mitte Rohrschale umgerechnet werden.

Bild 8 zeigt die geometrischen Zusammenhänge für die Umrechnung der Deformationen. Die radiale Zusammendrückung von Rohrmantel und Ring wird vernachlässigt; folglich gilt einfach

$$w_0 = w_r \dots \dots \dots (20)$$

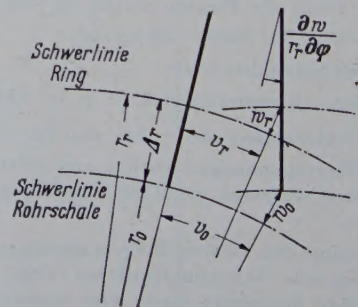


Bild 8. Zusammenhang zwischen den Deformationen des Ringes und der Rohrschale

Die Schubverformungen werden auch vernachlässigt; folglich besteht zwischen den tangentialen Verschiebungen die Beziehung

$$v_0 = v_r \cdot \frac{r_0}{r_r} + \Delta r \cdot \frac{\partial w_r}{r_r \partial \varphi} \quad \dots \quad (21)$$

Gleichung (20) und (21) in Gleichung (19) eingesetzt, gibt die auf Schwerlinie Ring wirkenden Kräfte p_r und p_t in Abhängigkeit von den Verschiebungen v_0 und w_0 auf Mitte Rohrschale.

Bild 9 zeigt die Umrechnung der Kräfte von Mitte Ring auf Mitte Rohrschale. Dabei ist zu beachten, daß die Größe und die Lage der Resultierenden jedes Ringelementes erhalten bleiben müssen.

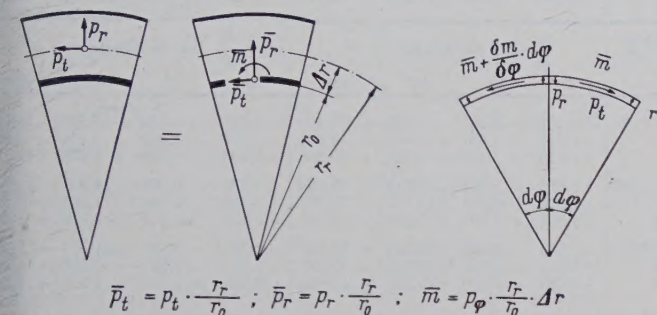


Bild 9. Umrechnen der Ringkräfte auf Mitte Rohrschale

Verschiebt man die Belastung nach den üblichen Regeln der Baustatik um die Strecke Δr nach innen, so bekommt man zunächst ein zusätzliches Moment \bar{m} . Da nur zwei freie Konstante v_0 und w_0 zur Verfügung stehen und infolgedessen nur zwei Gleichgewichtsbedingungen erfüllt werden können, muß dieses Moment durch Radial- und Tangentialkräfte ausgedrückt werden.

Das am Schalelement $r_0 d\varphi$ angreifende Moment $\bar{m} r_0 d\varphi$ wird zerlegt in zwei Radialkräfte

$$P_r = \frac{\bar{m} \cdot r_0 \cdot d\varphi}{r_0 \cdot d\varphi} = \bar{m} \quad \dots \quad (22)$$

und die zur Aufrechterhaltung des tangentialen Gleichgewichtes notwendige Tangentialkraft

$$P_t = P_r \cdot d\varphi = \bar{m} \cdot d\varphi \quad \dots \quad (23)$$

Das sind zunächst Kräfte von der Dimension kg; die müssen für die weitere Rechnung umgewandelt werden in laufende Belastungen mit der Dimension kg/cm.

Wenn die Momente in zwei benachbarten Schalelementen gleich groß sind, heben die Radialkräfte P_r an der Trennstelle sich gerade auf. Wenn die Momente sich um den Betrag $\frac{\partial \bar{m}}{\partial \varphi} \cdot d\varphi$ ändern, bleibt an der Trennstelle die radiale Differenzkraft

$$\Delta P_r = \frac{\partial \bar{m}}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \quad \dots \quad (24)$$

übrig, aus der sich die kontinuierlich verteilte Radialbelastung zu

$$\Delta P_r = \frac{\Delta P_r}{r_0 d\varphi} = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{\partial \bar{m}}{\partial \varphi} = \frac{\partial p_t}{\partial \varphi} \cdot \frac{r_r \Delta r}{r_0^2} = p_t \cdot n \cdot \frac{\Delta r \cdot r_r}{r_0^2} \quad \dots \quad (25)$$

ergibt. Die kontinuierlich verteilte Tangentialbelastung wird aus der Tangentialkraft unmittelbar berechnet

$$\Delta P_t = \frac{P_t}{r_0 d\varphi} = \frac{\bar{m}}{r_0} = p_t \cdot \frac{\Delta r \cdot r_r}{r_0^2} \quad \dots \quad (26)$$

Die resultierenden Ringkräfte bezogen auf Mitte Rohrschale sind

$$\left. \begin{aligned} p_t^* &= \bar{p}_t + \Delta p_t = p_t \cdot \frac{r_r}{r_0} \left(1 + \frac{\Delta r}{r_0} \right) = p_t \cdot \left(\frac{r_r}{r_0} \right)^2, \\ p_r^* &= \bar{p}_r + \Delta p_r = \frac{r}{r_0} \left(p_r + p_t \cdot n \cdot \frac{\Delta r}{r_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (27)$$

mit p_r und p_t aus Gleichung (19) mit (20) und (21).

Bestimmungsgleichungen für die Deformationen

Die Gleichgewichtsbedingungen für die tangentialen und radialen Schubkräfte (Bild 6) lauten

$$\left. \begin{aligned} 2 T_0 - p_t^* t &= T_x, \\ 2 S_0 + p_r^* t &= S_x, \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (28)$$

mit T_x und S_x nach Gleichung (16),

T_0 und S_0 nach Gleichung (15), wobei die Integrationskonstanten mit den Grenzbedingungen (Bild 6) durch v_0 und w_0 ausgedrückt sind,

und p_t und p_r nach Gleichung (27).

Die Auflösung des Gleichungssystems gibt die Verschiebungen v_0 und w_0 , die die Rohrschale an der Stelle erfährt, an der der Aussteifungsring sitzt. Nachdem die Verschiebungen bekannt sind, können Rohrschale und Ring getrennt weiterbehandelt werden.

2.23 Spannungen

Die Rohrschale bringt grundsätzlich nichts Neues. Wir hatten beim Aufstellen der Gleichungen die Integrationskonstanten durch die Verschiebungen v_0 und w_0 ausgedrückt. In diese Formeln werden nun die bekannten Werte für v_0 und w_0 eingeführt. Die bekannten Integrationskonstanten in Gleichung (2) eingesetzt, gibt die Verschiebungen und ihre Ableitungen. Diese Verschiebungswerte in Gleichung (13) eingesetzt, gibt die gesuchten inneren Kräfte.

Die Berechnung der Ringspannungen ist einfacher. Die bekannten Verschiebungen v_0 und w_0 in Gleichung (20) und (21) eingesetzt, gibt nach entsprechender Umformung die Verschiebungen auf Schwerlinie Ring

$$\left. \begin{aligned} w_r &= w_0, \\ v_r &= v_0 \cdot \frac{r_r}{r_0} + \frac{2 \Delta r}{r_0} \cdot w_0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (29)$$

Diese Verschiebungswerte werden in die Formeln für die inneren Kräfte

$$\left. \begin{aligned} N_\varphi &= \frac{D}{r_r} [w_r + n \cdot v_r + k \cdot w_r (1 - n^2)], \\ M_\varphi &= \frac{K}{r_r^2} \cdot w_r (1 - n^2) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (30)$$

eingesetzt und damit ist diese Aufgabe gelöst.

Mit den Zahlenwerten unseres Beispiels bekommt man für die Spannungen am Innen- und Außenrand des Ringes

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= +2344 - 571 = +1773 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_a &= -2344 - 571 = -2915 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (31)$$

Ohne Berücksichtigung der mittragenden Wirkung des Rohrmantels wären die entsprechenden Ringspannungen

$$\left. \begin{aligned} \sigma_i &= +4849 + 1178 = +6027 \text{ kg/cm}^2 \\ \sigma_a &= -4849 + 1178 = -3671 \text{ kg/cm}^2. \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (32)$$

Der Unterschied ist groß. Die Rechnung hat sich gelohnt. Aber sie ist in der vorstehend beschriebenen Form doch zu aufwendig, um dauernd auf den Konstruktionsbüros durchgeführt zu werden. Deswegen wird im folgenden gezeigt, wie sie vereinfacht werden kann.

2.24 Vereinfachungen

Annahmen über die Ringbelastung

Bei dem exakt durchgerechneten Zahlenbeispiel waren die Ringbelastungen

$$T_x = 1,766 p \cdot 2a \quad \text{und} \quad S_x = 0,142 p \cdot 2a,$$

und die zugehörigen Ringrandspannungen

$$\sigma_i = +1773 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{und} \quad \sigma_a = -2915 \text{ kg/cm}^2.$$

Wenn alle Druckkräfte als tangentialer Schub abgesetzt würden,

$$T_x = 2,000 p \cdot 2a \quad \text{und} \quad S_x = 0,$$

wären die Ringrandspannungen

$$\sigma_i = +1835 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{und} \quad \sigma_a = -2921 \text{ kg/cm}^2.$$

Wenn alle Druckkräfte als radialer Schub abgesetzt würden,

$$T_x = 0 \quad \text{und} \quad S_x = 1,000 p \cdot 2a,$$

wären die Ringrandspannungen

$$\sigma_i = +1371 \text{ kg/cm}^2 \quad \text{und} \quad \sigma_a = -2675 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Unterschied zwischen den Grenzwerten und den wirklichen Spannungen ist nicht so groß, daß die lange statisch unbestimmte Rechnung gerechtfertigt ist. Deswegen wird im folgenden näherungsweise mit den Mittelwerten

$$T_x = 1,8 p \cdot 2a \quad \text{und} \quad S_x = 0,1 \cdot p \cdot 2a \quad \dots \quad (33)$$

gerechnet.

Einsatz von Rechenautomaten

Wir haben für die Berechnung der Stützringe von Druckrohrleitungen auf der elektronischen Rechenmaschine IBM 650 Serienrechnungen durchgeführt, über die an anderer Stelle berichtet werden soll. Teilergebnisse davon können für die Berechnung von Aussteifungsringen verwendet werden.

Die Belastung der Aussteifungsringe entspricht dem zweiten Glied der Fourierreihe [Gleichung (3)]

$$p = \frac{2}{3\pi} \cdot \gamma \cdot r = 0,2122 \gamma \cdot r \dots \dots \dots (34)$$

Bei der vorstehend beschriebenen statisch unbestimmten Rechnung wurden alle Schubkräfte auf Mitte Rohrschale bezogen. Bei der Berechnung der Stützringe werden alle Schubkräfte auf Schwerlinie Ring bezogen. Die Umrechnung der Ringbelastung T_x und S_x von Mitte Rohrschale auf Schwerlinie Ring gibt

$$\left. \begin{aligned} T_x^* &= T_x \left(\frac{r_0}{r_r} \right)^2 \\ S_x^* &= \frac{r_0}{r_r} \left(S_x + T_x \cdot n \cdot \frac{\Delta r}{r_r} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

Gleichung (33) und (34) in Gleichung (35) eingesetzt, ergibt für die Belastung der Aussteifungsringe bezogen auf Schwerlinie Ring

$$\left. \begin{aligned} q_r &= \left(0,7639 \cdot \frac{\Delta r}{r_r} + 0,0212 \right) \frac{r_0}{r_r} \cdot \gamma \cdot \frac{r_0 2a}{t} \\ q_t &= 0,3820 \cdot \left(\frac{r_0}{r_r} \right)^2 \cdot \gamma \cdot \frac{r_0 2a}{t} \end{aligned} \right\} \dots \dots (36)$$

Die elektronische Rechenmaschine hat für verschiedene Schalen- und Ringdimensionen, die durch q_r und q_t im Ring hervorgerufenen Biege- und Längsspannungen berechnet. Die Ergebnisse sind in Tafel 1 zusammengestellt. Die Anwendung der Tafel wird an einem Zahlenbeispiel gezeigt.

Gegeben ist ein halb mit Wasser gefülltes Rohr

$$r_0 = 250 \text{ cm} \quad s = 1 \text{ cm} \quad r/s = 250,$$

mit Aussteifungsringen

$$h = 25 \text{ cm} \quad t = 2 \text{ cm} \quad h/r = 0,1$$

im Abstand

$$t_a = 600 \text{ cm} \quad t/h = 0,08.$$

Daraus ergibt sich für die Ringbelastung [Gleichung (36)]

$$q_r = \left(0,7639 \cdot \frac{13}{263} + 0,0212 \right) \frac{250}{263} \cdot 10^{-3} \cdot \frac{250 \cdot 600}{2,0} = 4,21 \text{ kg/cm}^2,$$

$$q_t = 0,3820 \cdot \left(\frac{250}{263} \right)^2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{250 \cdot 600}{2,0} = 25,89 \text{ kg/cm}^2,$$

für die Biege- und Längsspannungen im Ring

$$\sigma_b = 91,857 \cdot 4,21 + 43,624 \cdot 25,89 = 1516 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_l = -30,869 \cdot 4,21 - 11,069 \cdot 25,89 = -417 \text{ kg/cm}^2,$$

und für die Ringrandspannungen

$$\sigma_i = +1516 - 417 = +1099 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_a = -1516 - 417 = -1933 \text{ kg/cm}^2.$$

Der Wert 91,857 für die Biegespannung infolge Radialbelastung findet sich im linken oberen Quadranten der Tafel der mit σ_b/q_r überschrieben ist, in der Spalte $r/s = 250$, im Absatz $t/h = 0,08$ in der Zeile $h/r = 0,1$.

3. Einschnürung an den Ringen bei Innendruck

3.1 Überblick

Bei Innendruck weitet das ringlose Rohr sich auf bei offenen Rohrleitungen um

$$E w = \frac{p r^2}{s}, \dots \dots \dots (37a)$$

und bei geschlossenen Rohrleitungen um

$$E w = \frac{p r^2}{s} \cdot \left(1 - \frac{\mu}{2} \right) \dots \dots \dots (37b)$$

Diese Aufweitung wird an den Ringen gestört. Es entsteht eine gleichmäßig über den Umfang verteilte Radialkraft R , die den Ring aufweitet und das Rohr einschnürt (Bild 10). Die Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt. Als statisch unbestimmte Größe wird die Radialkraft R eingeführt. Sie wird aus der Bedingung berechnet, daß die Summe aus der Einschnürung der Rohrschale und der Aufweitung des Ringes gleich der ungestörten Ausdehnung des durch Innendruck belasteten Rohres ist.

Tafel 1. Dimensionslose Spannungen für die Dimensionierung von Aussteifungsringen

Ringe $\frac{h}{r}$ $\frac{t}{h}$	$\frac{\sigma_b}{q_r}$ für die Schalen $\frac{r}{s} =$				$\frac{\sigma_l}{q_t}$ für die Schalen $\frac{r}{s} =$			
	25	60	120	250	25	60	120	250
	$\frac{r}{s}$	$\frac{r}{s}$	$\frac{r}{s}$	$\frac{r}{s}$	$\frac{r}{s}$	$\frac{r}{s}$	$\frac{r}{s}$	$\frac{r}{s}$
0,1 0,04	+1,416	+9,999	+31,644	+67,996	-2,207	-11,299	-26,767	-35,2
0,2	+3,648	+11,871	+21,455	+35,045	-4,373	-9,127	-9,319	-6,1
0,3	+3,968	+8,980	+14,844	+21,625	-3,852	-4,525	-3,261	-1,4
0,1 0,08	+2,696	+16,632	+45,431	+91,857	-4,055	-16,831	-30,223	-30,8
0,2	+5,652	+16,183	+28,717	+43,335	-5,960	-9,075	-7,461	-3,5
0,3	+5,480	+12,181	+19,032	+24,783	-4,155	-3,742	-1,987	-0,2
0,1 0,12	+3,868	+21,811	+55,867	+108,925	-5,625	-19,978	-30,572	-36,8
0,2	+7,140	+19,557	+33,686	+47,576	-6,715	-8,579	-6,084	-2,2
0,3	+6,664	+14,506	+21,367	+26,134	-4,128	-3,113	-1,269	-0,2

Die Vorzeichen gelten für den waagrecht den Durchmesser (bei Biegung am Innenrand).

3.2 Schalendeformation

Um die Rechnung zu vereinfachen und allgemein gültige Formeln zu bekommen, wird auch diesem Lastfall das ideale System (Bild 7) zugrunde gelegt. Auch hier verwendet man zweckmäßig Gleichung (2) als Lösung der Differentialgleichung. Die Glieder $e^{+\alpha \frac{x}{r}}$ entfallen, weil die Störung im Unendlichen abgeklungen sein muß. Die Verschiebung v in Umfangsrichtung ist gleich Null wegen der Rotationssymmetrie. Außerdem gilt bei Rotationssymmetrie immer

$$\alpha_1 = \beta_1 = \alpha = 1,2854 \sqrt{\frac{r}{s}}, \quad \alpha_2 = \beta_2 = 0. \dots (38)$$

Hier gibt es keine langsam abklingende Störungsfunktion. Damit vereinfacht sich die Lösung der Differentialgleichung zu

$$\left. \begin{aligned} u &= e^{-\alpha \frac{x}{r}} \left[A_1 \cdot \cos \alpha \frac{x}{r} + A_2 \cdot \sin \alpha \frac{x}{r} \right] \\ w &= e^{-\alpha \frac{x}{r}} \left[C_1 \cdot \cos \alpha \frac{x}{r} + C_2 \cdot \sin \alpha \frac{x}{r} \right] \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

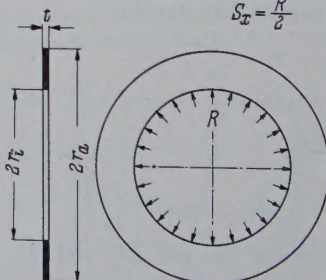
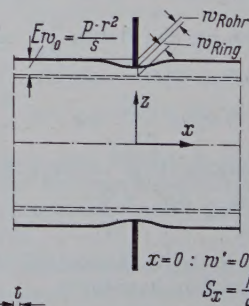


Bild 10. Einschnürung durch Innendruck

Die Grenzbedingungen für die Bestimmung der Integrationskonstanten sind in Bild 10 eingetragen. Damit bekommt man für gesuchte Einschnürung der Rohrschale

$$\left(\frac{E \cdot w}{r} \right)_{\text{Rohr}} = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{r}{s} \cdot e^{-\alpha \frac{x}{r}} \left[\cos \alpha \frac{x}{r} + \sin \alpha \frac{x}{r} \right] \dots (40)$$

3.3 Ringdeformation

Wir benützen die Formeln, die in der Hütte [2] für das dicke Rohr stehen; dabei ist die radiale Zusammendrückung des Ringes berücksichtigt. Für die Aufweitung am Innenrand gilt

$$\left(\frac{E \cdot w}{R}\right)_{\text{Ring}} = \frac{r_i}{t} \left[\frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \mu \right] \quad \dots (41)$$

3.4 Bestimmungsgleichung für die Radialkraft

Die Bestimmungsgleichung für die Radialkraft R lautet

$$E \cdot w_0 = \left(\frac{E \cdot w}{R}\right)_{\text{Rohr}} \cdot R + \left(\frac{E \cdot w}{r}\right)_{\text{Ring}} \cdot R \quad \dots (42)$$

3.5 Spannungen

In der Rohrschale

$$\text{axial} \quad \sigma_x = \pm \frac{R}{2 \cdot r} \cdot \frac{\alpha^3}{1 - \mu^2}, \quad \dots (43)$$

$$\text{tangential} \quad \sigma_\varphi = \frac{R}{2 \cdot s} \cdot \frac{\alpha}{1 - \mu^2} + \mu \cdot \sigma_x, \quad (44)$$

im Ring

$$\text{außen} \quad \sigma_a = \frac{R}{t} \cdot \frac{2 r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}, \quad \dots (45)$$

$$\text{innen} \quad \sigma_i = \frac{R}{t} \cdot \frac{r_a^2 + r_i^2}{r_a^2 - r_i^2}, \quad \dots (46)$$

Zahlenbeispiel: Rohr $r_0 = 200$ cm $s = 1$ cm (offen)

Ring $r_a = 230,5$ cm $r_i = 200,5$ cm $t = 1,6$ cm

Innendruck $p_i = 4$ atü.

$$\alpha = 18,1783$$

$$E \cdot w_0 = 16 \cdot 10^4 \text{ kg/cm}$$

Spannung im Rohr:

$$\sigma_x = \pm 955 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_\varphi = -578 \pm 287 \text{ kg/cm}^2$$

Spannung im Ring:

$$\sigma_i = +262 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_a = +225 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\left(\frac{E \cdot w}{r}\right)_{\text{Rohr}} = 1822,37$$

$$\left(\frac{E \cdot w}{r}\right)_{\text{Ring}} = 942,12$$

$$R = 57,8769 \text{ kg/cm}$$

Viel schwieriger als die Berechnung dieser Nebenspannungen ist ihre richtige Wertung bezüglich der Bruchgefahr.

Die tangentielle Hauptspannung im unverstärkten Rohr ist bei dem Zahlenbeispiel

$$\sigma = \frac{p \cdot r}{s} = 800 \text{ kg/cm}^2.$$

Lösung unsymmetrisch räumlicher Stabsysteme nach dem Formänderungsverfahren insbesondere unter Verwendung kinematischer Ketten für die virtuellen Verschiebungszustände

Von Dipl.-Ing. R. Kapucuoğlu, Ankara¹⁾

DK 624.072.33 — 624.041.2

1. Einleitung

Ein großer Teil aller Aufgaben, denen der Statiker in der Praxis begegnet, gehört in das Gebiet der räumlichen Statik. Aber in den weitaus meisten Fällen läßt sich ein räumliches Tragwerk in verschiedene ebene Systeme zerlegen. Das System, mit dem sich die vorliegende Arbeit beschäftigt, läßt sich insbesondere bei Kühlturm-Unterbauten anwenden.

Nach H. Reissner erlaubt das zyklisch-symmetrische Gebilde die Anwendung endlicher trigonometrischer Reihen, wobei $6n$ Gleichungen in n Systeme von je 6 Gleichungen zerfallen. Nach dem Verfahren von S. Müller und E. Kammer ist es auch möglich, durch die Anwendung der statisch unbestimmten Hauptsysteme die Matrix der $6n$ Unbekannten in 6 Gruppen von n Überzähligen zu zerlegen.

A. Rudakow spricht von der Möglichkeit einer gleichgebauten Matrix mit doppelt symmetrischen zyklischen Teilmatrizen, indem man $6n$ Überzählige in 2 Hauptgruppen, je $3n$ Größen, teilt, jeder von diesen beiden Gruppen liegt entweder das statisch bestimmte oder das $3n$ -fache statisch unbestimmte Hauptsystem zugrunde. Durch Anwendung des Gruppenlastenverfahrens läßt O. Lütken die Überzähligen als lineare Funktionen von $6n$ -Gruppen-Größen

Die axiale Biegespannung $\sigma = 955 \text{ kg/cm}^2$ im Rohr ist größer und kann, wenn sie sich mit anderen Längsspannungen überlagert, die Streckgrenze erreichen; dann wird sie abgebaut. Es fällt einigermaßen schwer sich vorzustellen, daß diese axialen Biegespannungen zum Bruch führen sollen; deswegen ist der Gedanke naheliegend, sie einfach zu vernachlässigen. Aber bevor die Streckgrenze erreicht wird, ist der gerechnete Spannungszustand zweifellos vorhanden, und wenn die Rohrschale als Innengurt der Ringe Zusatzspannungen bekommt, ist es vorteilhaft, die Abnahme der tangentialen Hauptspannungen durch die Einschnürung zu berücksichtigen, damit die resultierenden Spannungen im rechnerisch zulässigen Bereich bleiben.

Wir wollen diese Gedankengänge hier nicht weiter verfolgen, sondern nur festhalten, daß die Einschnürung des Rohrmantels an den Ringen ein Problem der Traglast ist, das mit Rechnungen im elastischen Bereich nicht vollständig geklärt werden kann.

4. Zusammenfassung

Die bei teilweiser Wasserfüllung im Rohrmantel zwischen den Ringen ausgelösten Biegespannungen sind vom Verhältnis r/s und vom Ringabstand abhängig. Es wurden Formeln angegeben, mit denen diese Spannungen berechnet werden können.

An den Aussteifungsringen werden die freien Deformationen des Rohrmantels behindert und dabei Spannungen im Rohrmantel und in den Ringen ausgelöst. Diese Spannungen wurden für zwei Deformationszustände berechnet, Verhinderung der Verbiegung des Rohrmantels aus teilweiser Wasserfüllung und Einschnürung durch Innendruck.

Der erste Lastfall wird zuerst ausführlich und genau durchgerechnet. Dann wird gezeigt, daß man die Ringbelastung mit guter Näherung schätzen und die zugehörigen Spannungen einer mit Rechenautomaten aufgestellten Tafel entnehmen kann.

Für den zweiten Lastfall werden einfache Formeln angegeben, mit denen die Spannungen exakt berechnet werden können.

Die Anwendung sämtlicher Rechenvorschriften wird an Zahlenbeispielen gezeigt.

Schrifttum

- [1] Flügg e: Statik und Dynamik der Schalen, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957, S. 141 ff.
- [2] Hütte: Des Ingenieurs Taschenbuch, 1. Bd. Verlag W. Ernst u. Sohn, Berlin 1942, S. 734.

¹⁾ Auszugsweise Wiedergabe der von der Fakultät für Bauingenieurwesen der technischen Hochschule Darmstadt zur Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs genehmigten Dissertation. Referent: Prof. Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. K. Klöppel, Korreferent: Prof. Dr. U. Wegener.

In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Weg zur Berechnung räumlicher und unsymmetrischer Stabsysteme eingeschlagen. Das Verfahren, welches K. Klöppel in seinen Vorlesungen „Statik IV“ für ebene Systeme entwickelt hat [1], wird hier auf räumliche Ge-

bilde erweitert. Als Formänderungsgrößen werden Knotendrehwinkel und Parameter der Stabdrehwinkel in die Rechnung eingeführt.

2. Die geometrischen Eigenschaften des Tragwerks

Die gegebenen Tragwerke bilden im Grundriß ein geschlossenes p -Eck mit gerader oder ungerader Anzahl von Ringstäben. Das Tragwerk ist ein biegungs- und drillungssteifer räumlicher Rahmen. Die Stabachsen sind gerade. Alle Stäbe werden mit doppelt symmetrischem und geschlossenem Querschnitt vorausgesetzt (verwölbungsfrei). Die Riegel sind in den Knoten eingespannt oder frei drehbar angeschlossen, die Pfosten in den Knoten und in den Fußpunkten eingespannt oder frei drehbar gestützt. Die Ringebene ist waagrecht und die Hauptträgheitsachsen der Riegelquerschnitte sind ebenso waage- und lotrecht. Die durch die schräge Pfostenachse gelegte Vertikalebene steht somit senkrecht zur Ringebene. Die Trägheitsachsen der Pfosten liegen in dieser Vertikalebene und senkrecht dazu (Bild 1). Die Trägheitsmomente der Stäbe sind konstant. Außerdem müssen die Knotenwinkel der Ringebene $\geq 90^\circ$ sein.

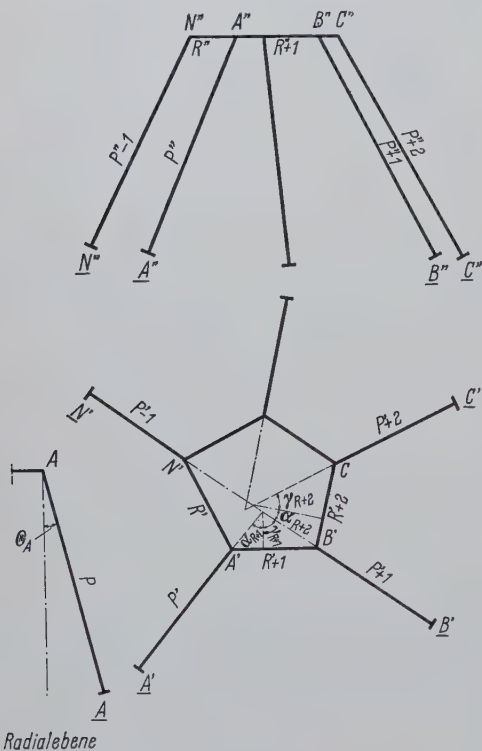


Bild 1. Räumlicher unsymmetrischer Vieleckrahmen in Aufsicht und Grundriß

3. Die kinematischen Betrachtungen

Die Knoten betrachten wir als Raumelemente, deren Verschiebungs- und Drehvektoren in einem festen Koordinatensystem die wirklichen Komponenten r, t, v besitzen. Der Endpunkt der Stabachse ist gezwungen, die Verschiebungen mitzumachen.

Der im Raume vollkommen freie Körper hat 6 Freiheitsgrade der Bewegung [3]. Die sechs Freiheitsgrade entstehen durch einander senkrechte Parallelverschiebungen u_K, v_K, w_K und 3 Drehwinkel $\varphi_K^r, \varphi_K^t, \varphi_K^v$ um zueinander senkrecht stehende Achsen r, t, v .

Das Gelenktragwerk entsteht durch Einführung von Gelenken an den Stellen der steifen Ecken, so daß alle Stäbe an den Knoten gelenkartig miteinander verbunden sind. Diese kinematische Kette hat im allgemeinen mehrfache Bewegungsfreiheit. Bei p -facher Bewegungsfreiheit läßt sich diese Kette durch Hinzufügen von p passend gewählten Stäben, die wir als (f) -Stäbe bezeichnen wollen, in ein Stabsystem verwandeln, welches die Abzählungsbedingungen statischer Bestimmtheit erfüllen kann unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen, die eine lineare Superposition gestatten [5].

Vernachlässigt man wie üblich die Stabdehnungen, so genügt es, bei räumlichen Vieleckrahmen nur eine Verschiebungskomponente für jeden freien Knotenpunkt anzugeben, um die Größen der Stab-

drehwinkel eindeutig festzulegen. Die Anzahl der erforderlichen Netzgleichungen entspricht der Anzahl p der Stäbe, die man zum Gelenktragwerk in passender Weise hinzufügen muß, damit ein statisch bestimmtes Raumbachwerk nach der bekannten Beziehung $3n = s + p$ entsteht; es sind also $p = 3n - s$ Netzgleichungen erforderlich.

Für die Berücksichtigung der Knotendrehungen sind $3n$ Knotengleichungen notwendig. Wenn der räumliche Rahmen (n) Knoten hat, dann stehen uns $X_F = (p + 3n)$ Unbekannte zur Verfügung. Sollen noch die Längenänderungen der Stäbe berücksichtigt werden, so zieht dies für die Gestaltänderung noch weitere (s) Bewegungsfreiheiten nach sich.

4. Die geometrischen Eigenschaften des Verschiebungszustandes und die Stabendmomente des Hauptsystems. Bestimmung der Stabdrehwinkel mit Hilfe von Verschiebungsplänen

Das Stabnetz hat n freie Knotenpunkte $(A \dots N)$ und n Fußpunkte $(A' \dots N')$. Die Riegel haben die Längen von $l_R \dots l_{R+n}$. Ebenso haben die Pfosten ungleiche Längen von $l_P \dots l_{P+n}$, wobei mit dem Buchstaben l die theoretische Länge zwischen den Knotenpunkten angegeben wird. Die Zentriwinkel sind α_R, γ_R bis $\alpha_{R+n}, \gamma_{R+n}$ nach Bild 1. θ_K ist der Neigungswinkel des durch Knoten K gehenden Pfostens gegen die Lotrechte. Alle Stäbe und alle Knoten werden auf ein eigenes Koordinatensystem bezogen. Die Achsen von Riegel und Pfosten sind x, y, z . Die z -Achse fällt mit der Stabachse zusammen, die y - und x -Achsen sind Hauptträgheitsachsen des Querschnitts. Beim Riegel sind sie waagrecht und senkrecht zueinander.

Die y - und z -Achsen liegen beim Pfosten in der Ebene, die senkrecht zur Ringebene steht; die x -Achsen liegen senkrecht zur jeweiligen Pfostenachse, also horizontal. Die Koordinatenachsen der Knoten sind r, t, v . Die Achsen r und t liegen waagrecht und die Achsen v lotrecht (Bild 2). Alle Koordinatenachsen sind als Rechtshandsystem vorgesehen.

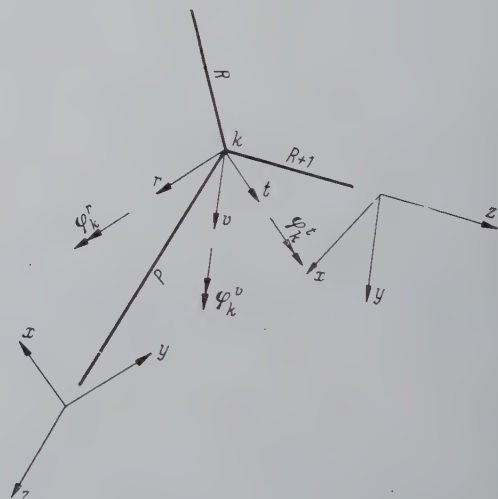


Bild 2. Pfosten- und Riegelachsen x, y, z ; Knotenachsen r, t, v

system vorgesehen. Die Trägheitsmomente sind J_{Rx}, J_{Ry} der Riegel und J_{Px}, J_{Py} der Pfosten. Der Drillungswiderstand der Riegel und Pfosten wird mit D_R, D_P bezeichnet. Für die Berechnung wählen wir reduzierte Stablängen, wobei J_c ein Vergleichsträgheitsmoment darstellt.

$$l'_{Rx} = l_{Rx} \frac{J_c}{J_{Rx}}; \quad l'_{Ry} = l_{Ry} \frac{J_c}{J_{Ry}}; \quad l'_{Rz} = l_{Rz} \frac{E \cdot J_c}{G \cdot D_R};$$

$$l'_{Px} = l_{Px} \frac{J_c}{J_{Px}} \text{ usw.}$$

Die Komponenten des Verschiebungszustandes sind Vektoren. Diese werden positiv bezeichnet, wenn sie mit der Richtung der positiven Achsen x, y, z , und r, t, v übereinstimmen und sich im Uhrzeigersinn drehen. Die geometrisch unbestimmten Größen des Verschiebungszustandes sind die Komponenten $\varphi_K^r, \varphi_K^t, \varphi_K^v$ des Knotendrehwinkels (um die Achsen r, t, v) und die Parameter der gedachten Verschiebung ξ_K^c ($K = A, B \dots N$). Kontinuitätsbedingungen sind die Verdrehungen und Verschiebungen der Endtangentialen der Riegel- und Pfostenstäbe. Dies sind beim Riegel R die Winkel

$\varphi_K^{x(R)}, \varphi_K^{y(R)}, \varphi_K^{z(R)}$ und $\varphi_{K-1}^{x(R)}, \varphi_{K-1}^{y(R)}, \varphi_{K-1}^{z(R)}$, am Pfosten P die Winkel $\varphi_K^{x(P)}, \varphi_K^{y(P)}, \varphi_K^{z(P)}$.

Die Verdrehungen der Stabenden φ_k ergeben sich sehr einfach aus den Drehwinkeln der entsprechenden Knoten [8], [9].

$$\left. \begin{aligned} \varphi_K^{x(R)} &= \varphi_K^r \cos \gamma_R - \varphi_K^t \sin \gamma_R \\ \varphi_K^{z(R)} &= \varphi_K^r \sin \gamma_R + \varphi_K^t \cos \gamma_R \\ \varphi_K^{y(R)} &= \varphi_K^v \\ \varphi_{K-1}^{x(R)} &= \varphi_{K-1}^r \cos \alpha_R + \varphi_{K-1}^t \sin \alpha_R \\ \varphi_{K-1}^{z(R)} &= -\varphi_{K-1}^r \sin \alpha_R + \varphi_{K-1}^t \cos \alpha_R \\ \varphi_{K-1}^{y(R)} &= \varphi_{K-1}^v \\ \varphi_K^{y(P)} &= -\varphi_K^r \cos \Theta_K + \varphi_K^v \sin \Theta_K \\ \varphi_K^{z(P)} &= \varphi_K^r \sin \Theta_K + \varphi_K^v \cos \Theta_K \\ \varphi_K^{x(P)} &= -\varphi_K^t \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

Die unabhängigen Komponenten des Stabdrehwinkels sind lineare Funktionen der Parameter ζ_K^c , die nach Superposition folgendermaßen lauten:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_R^x &= \vartheta_{R0}^x + \sum_{K=1}^{K=p} \vartheta_{RK}^{xc} \zeta_K^c \\ \vartheta_R^y &= \vartheta_{R0}^y + \sum_{K=1}^{K=p} \vartheta_{RK}^{yc} \zeta_K^c \\ \vartheta_P^x &= \vartheta_{P0}^x + \sum_{K=1}^{K=p} \vartheta_{PK}^{xc} \zeta_K^c \\ \vartheta_P^y &= \vartheta_{P0}^y + \sum_{K=1}^{K=p} \vartheta_{PK}^{yc} \zeta_K^c \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

$(K = A, B \dots N).$

Die Komponenten des Stabdrehwinkels des geometrisch bestimmten Hauptsystems sind $\vartheta_{R0}^x, \vartheta_{R0}^y, \vartheta_{P0}^x, \vartheta_{P0}^y$ für $\varphi_K^r = 0, \zeta_K^c = 0$ ($K = A, B \dots N$). Diese sind Stützverschiebungen ($E J_c \Delta l$), oder Längenänderungen ($E J_c \Delta l$) infolge von Längskräften und Temperatur (t). Die Stabdrehwinkel $\vartheta_{R0}^x, \vartheta_{R0}^y$ ($v = x, y$) werden aus der Gelenkfigur für jeden Stab, entweder durch das numerische Verfahren (B-Gewichte-Stabzugverfahren) oder durch das zeichnerische Verfahren mit Hilfe des Williot'schen Verschiebungsplanes berechnet. Bei Komponenten der Stabdrehwinkel gehört die erste Kopffziffer zur ersten Fußziffer, die zweite Kopffziffer zur zweiten Fußziffer. Die ersten beiden bezeichnen Ort und Richtung des Vektors, die beiden anderen die Ursache.

Wir leiten jetzt aus einem Verschiebungszustand $\zeta_K^c = +1$ die Beziehungen zwischen ϑ und ζ_K^c ab und zeichnen im folgenden für ein räumliches Rahmenwerk den Verschiebungsplan (Bild 3). Es empfiehlt sich, in Grund- und Aufrißprojektion zu arbeiten, da man dann direkt die drei Verschiebungskomponenten u_K, v_K, w_K ablesen kann.

Der Endpunkt eines Stabes des Mechanismus beschreibt bei dessen Bewegung um einen festen Punkt (Momentanpol) eine Kugelfläche [3]. Die Bestimmung des Verschiebungsplanes vereinfacht sich mit Hilfe der Hauptträgheitsachsen des Stabes. An Stelle der Kugelflächen werden Kegelflächen gesetzt [2], außerdem wird die Bewegung jedes Stabes durch den Williot'schen Verschiebungsplan unter der Voraussetzung $\Delta s = 0$ ermittelt, deren waage- und senkrechte

Ebenen (radial zum Pfosten) den fertigen Plan festlegen. Gegebene Verschiebungen sind gegenüber den Stablängen sehr klein, damit entstehen nur Fehler zweiter Ordnung. Wir wählen p Stäbe der Kette aus, deren Drehungen unabhängig voneinander erfolgen, und erhalten p voneinander unabhängiger Geschwindigkeitspläne, indem wir der Reihe nach einem der Knoten eine Verschiebung 1 zuschreiben, während die Verschiebungen der übrigen $p-1$ Knoten gleich Null angenommen werden. Dann entwickelt man für die kinematische Kette mit $\zeta_K^c = +1$ (Bild 3) folgende Stabdrehwinkel:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_{R,K}^{yc} &= + \frac{1}{l_R} \left[\frac{1}{\operatorname{tg}(\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{1}{\operatorname{tg}(\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right] \\ \vartheta_{R,K}^{xc} &= + \frac{1}{l_R} \left[\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin(\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin(\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right] \\ \vartheta_{R+1,K}^{yc} &= - \frac{1}{l_{R+1}} \cdot \frac{1}{\sin(\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\ \vartheta_{R+1,K}^{xc} &= - \frac{1}{l_{R+1}} \cdot \frac{\cos \alpha_{R+1}}{\sin(\gamma_R + \alpha_{R+1})} \operatorname{tg} \Theta_K \\ \vartheta_{P,K}^{xc} &= - \frac{1}{l_P} \cdot \frac{\cos \alpha_{R+1}}{\sin(\gamma_R + \alpha_{R+1}) \cos \Theta_K} \\ \vartheta_{P,K}^{yc} &= + \frac{1}{l_P} \cdot \frac{\sin \alpha_{R+1}}{\sin(\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\ \vartheta_{P-1,K}^{yc} &= + \frac{1}{l_{P-1}} \cdot \frac{\sin \gamma_{R-1}}{\sin(\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \\ \vartheta_{P-1,K}^{xc} &= + \frac{1}{l_{P-1}} \cdot \frac{\cos \gamma_{R-1}}{\sin(\gamma_{R-1} + \alpha_R) \cos \Theta_{K-1}} \\ \vartheta_{R-1,K}^{yc} &= - \frac{1}{l_{R-1}} \cdot \frac{1}{\sin(\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \\ \vartheta_{R-1,K}^{xc} &= - \frac{1}{l_{R-1}} \cdot \frac{\cos \gamma_{R-1}}{\sin(\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \operatorname{tg} \Theta_{K-1} \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

Die übrigen Stäbe erleiden keine Verdrehung. Nach dem Superpositionsgesetz erhält man mit Hilfe der Gleichungen (2) und (3) die gesuchten Stabdrehwinkel wie folgt:

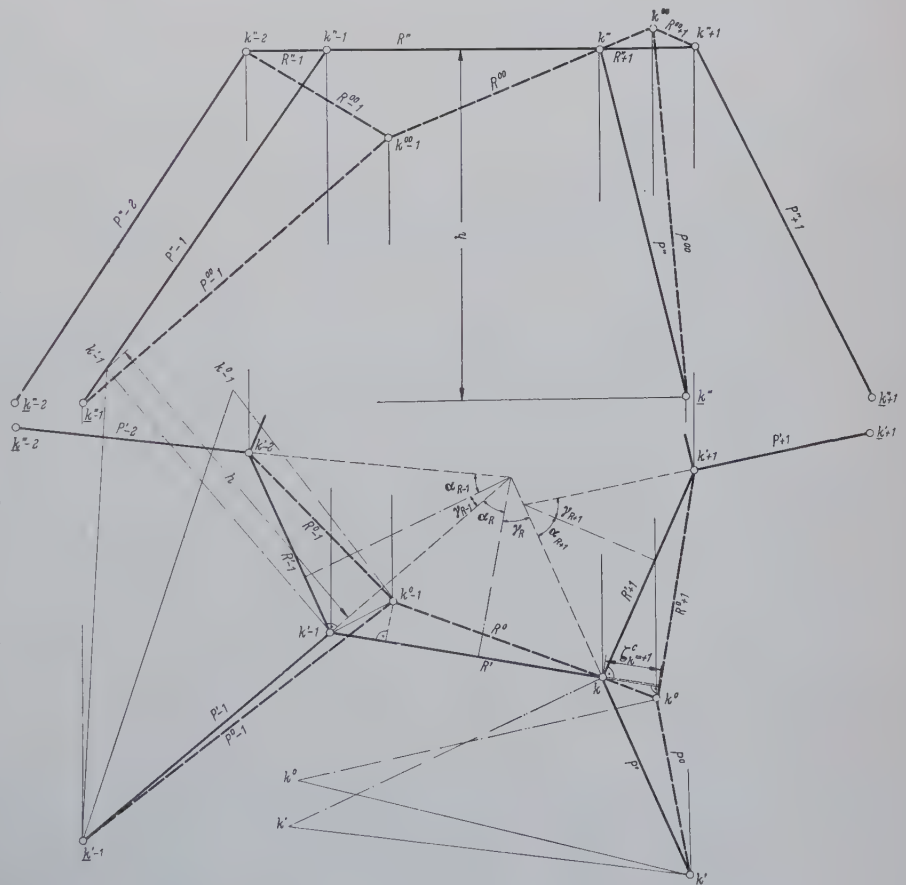


Bild 3. Verschiebungsfigur der Gelenkkette in Aufriß und Grundriß für $\zeta_K^c = +1$

$$\begin{aligned}
 \vartheta_R^x &= \vartheta_{R,0}^x - \zeta_{K-1}^c \frac{1}{l_R} \cdot \frac{\cos \alpha_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} + \\
 &+ \zeta_K^c \frac{1}{l_R} \left[\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right] - \\
 &- \zeta_{K+1}^c \frac{1}{l_R} \cdot \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\
 \vartheta_R^y &= \vartheta_{R,0}^y - \zeta_{K-1}^c \frac{1}{l_R} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} + \\
 &+ \zeta_K^c \frac{1}{l_R} \left[\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right] - \\
 &- \zeta_{K+1}^c \frac{1}{l_R} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\
 \vartheta_P^x &= \vartheta_{P,0}^x - \frac{1}{l_P \cos \Theta_K} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \cdot \\
 &\quad (\zeta_K^c \cos \alpha_{R+1} - \zeta_{K+1}^c \cos \gamma_R) \\
 \vartheta_P^y &= \vartheta_{P,0}^y + \frac{1}{l_P} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \cdot \\
 &\quad (\zeta_K^c \sin \alpha_{R+1} + \zeta_{K+1}^c \sin \gamma_R).
 \end{aligned} \quad \dots (4)$$

5. Bestimmung der Stabendmomente des Tragwerks

5.1 Stäbe am Knotenanschluß elastisch und bei den Stützpunkten starr eingespannt

Infolge äußerer Lasten treten im Hauptsystem die Stabendmomente als Drill- und Biegemomente auf. Die Biegemomente, die sich auf die Hauptachsen beziehen, sollen sich an jedem Stabend befinden; es werden $M_K^x M_K^y$ als Biege- und M_K^z als Drillmoment auf treten. Die Momente gelten als positiv, wenn ihre Vektoren in der positiven Richtung der Stabachsen angebracht werden und sich in der Uhrzeigerichtung drehen. Der Spannungszustand eines jeden Abschnittes, z. B. Riegel (R) wird durch geometrische Randwerte der relativen Verschiebung der Stabenden und durch die Drehwinkel der Stabendtangente bestimmt. Die statisch unbestimmten Anschlußkräfte des Stabes nach dem Superpositionsgesetz werden folgendermaßen zerlegt, analog den für ebene Konstruktionen bestimmten Formeln. Mit Hilfe der Gleichungen (1), (3), (4) ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 M_K^{x(R)} &= M_{K,0}^{x(R)} + \frac{2}{l_{Rx}} \left\{ 2 (\varphi_K^r \cos \gamma_R - \varphi_K^t \sin \gamma_R) + \varphi_{K-1}^r \cos \alpha_R + \varphi_{K-1}^t \sin \alpha_R - \frac{3}{l_R} \left[-\zeta_{K-1}^c \frac{\cos \alpha_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \zeta_K^c \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) - \zeta_{K+1}^c \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right] - 3 \vartheta_{R,0}^x \right\} \\
 M_K^{y(R)} &= M_{K,0}^{y(R)} + \frac{2}{l_{Ry}} \left\{ 2 (\varphi_K^v + \varphi_{K-1}^v) - \frac{3}{l_R} \left[-\zeta_{K-1}^c \frac{1}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \zeta_K^c \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) - \zeta_{K+1}^c \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right] - 3 \vartheta_{R,0}^y \right\} \\
 M_K^{z(R)} &= M_{K,0}^{z(R)} + \frac{1}{l_{Rz}} \left\{ \varphi_K^r \sin \gamma_R + \varphi_K^t \cos \gamma_R + \varphi_{K-1}^r \sin \alpha_R - \varphi_{K-1}^t \cos \alpha_R \right\} \\
 M_{K-1}^{x(R)} &= M_{K-1,0}^{x(R)} + \frac{2}{l_{Rx}} \left\{ 2 (\varphi_{K-1}^r \cos \alpha_R + \varphi_{K-1}^t \sin \alpha_R) + \varphi_K^r \cos \gamma_R - \varphi_K^t \sin \gamma_R - \frac{3}{l_R} \left[-\zeta_{K-1}^c \frac{\cos \alpha_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \zeta_K^c \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) - \zeta_{K+1}^c \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right] - 3 \vartheta_{R,0}^x \right\} \\
 M_{K-1}^{y(R)} &= M_{K-1,0}^{y(R)} + \frac{2}{l_{Ry}} \left\{ 2 (\varphi_{K-1}^v + \varphi_K^v) - \frac{3}{l_R} \left[-\zeta_{K-1}^c \frac{1}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \zeta_K^c \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) - \zeta_{K+1}^c \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right] - 3 \vartheta_{R,0}^y \right\} \\
 M_{K-1}^{z(R)} &= M_{K-1,0}^{z(R)} + \frac{1}{l_{Rz}} \left[-\varphi_{K-1}^r \sin \alpha_R + \varphi_{K-1}^t \cos \alpha_R - \varphi_K^r \sin \gamma_R + \varphi_K^t \cos \gamma_R \right] \\
 M_K^{x(P)} &= M_{K,0}^{x(P)} + \frac{2}{l_{Px}} \left\{ -2 \varphi_K^t + \frac{3}{l_P \cos \Theta_K} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} (\zeta_K^c \cos \alpha_{R+1} - \zeta_{K+1}^c \cos \gamma_R) - 3 \vartheta_{P,0}^x \right\} \\
 M_K^{y(P)} &= M_{K,0}^{y(P)} + \frac{2}{l_{Py}} \left\{ 2 (-\varphi_K^r \cos \Theta_K + \varphi_K^v \sin \Theta_K) - \frac{3}{l_P} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} (\zeta_K^c \sin \alpha_{R+1} + \zeta_{K+1}^c \sin \gamma_R) - 3 \vartheta_{P,0}^y \right\} \\
 M_K^{z(P)} &= M_{K,0}^{z(P)} + \frac{1}{l_{Pz}} [\varphi_K^r \sin \Theta_K + \varphi_K^v \cos \Theta_K] \\
 M_K^{x(P)} &= M_{K,0}^{x(P)} + \frac{2}{l_{Px}} \left\{ -\varphi_K^t \frac{3}{l_P \cos \Theta_K} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} (\zeta_K^c \cos \alpha_{R+1} - \zeta_{K+1}^c \cos \gamma_R) - 3 \vartheta_{P,0}^x \right\} \\
 M_K^{y(P)} &= M_{K,0}^{y(P)} + \frac{2}{l_{Py}} \left\{ -\varphi_K^r \cos \Theta_K + \varphi_K^v \sin \Theta_K - \frac{3}{l_P} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} (\zeta_K^c \sin \alpha_{R+1} + \zeta_{K+1}^c \sin \gamma_R) - 3 \vartheta_{P,0}^y \right\} \\
 M_K^{z(P)} &= M_{K,0}^{z(P)} - \frac{1}{l_{Pz}} (\varphi_K^r \sin \Theta_K + \varphi_K^v \cos \Theta_K)
 \end{aligned} \quad \dots (5)$$

Die Komponenten des Verschiebungszustandes sind aus Gleichung (1) und (4) bekannt, aus denen alle Balkenmomente berechnet werden, sobald die unbekannten Formänderungsgrößen φ_K^v ($v = r, t, v$) und ζ_K^c ($K = A, B \dots N$) ermittelt sind.

Sind die geometrischen Randwerte Null, so entstehen mit $M_K^{x(R)}$, $M_{K,0}^{x(R)}$ usw. die statisch unbestimmten Anschlußkräfte der beidseitig starr eingespannten Stäbe aus äußerer Belastung und ungleichermaßen Temperaturänderungen Δt_x , Δt_y . Diese Werte gelten für alle Gleichungen.

5.2 Stäbe des Tragwerks an den Knoten eingespannt und an den Fußpunkten gelenkig angeschlossen

Die Schnittkräfte nach (5) gelten mit Ausnahme von:

$$\left. \begin{aligned} M_K^{x(P)} &= M_K^{y(P)} = M_K^{z(P)} = 0, & M_K^{z(P)} &= M_{K,0}^{z(P)} \\ M_K^{x(P)} &= M_{K,0}^{x(P)} + \frac{3}{l_{Px}} \left\{ -\varphi_K^t + \frac{1}{l_P \cos \Theta_K} \cdot \frac{1}{\sin(\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right. \\ &\quad \left. (\zeta_K^c \cos \alpha_{R+1} - \zeta_{K+1}^c \cos \gamma_R) - \vartheta_{P,0}^x \right\} \\ M_K^{y(P)} &= M_{K,0}^{y(P)} + \frac{3}{l_{Py}} \left\{ -\varphi_K^r \cos \Theta_K + \varphi_K^v \sin \Theta_K - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{l_P \sin(\gamma_R + \alpha_{R+1})} (\zeta_K^c \sin \alpha_{R+1} + \zeta_{K+1}^c \sin \gamma_R) - \vartheta_{P,0}^y \right\} \end{aligned} \right\} (6)$$

6. Vereinfachung der Gleichungen infolge zyklischer Symmetrie

Geometrische Eigenschaften s. Bild 4.

l_R = Länge der Riegel

l_P = Länge der Pfosten

Θ = Neigungswinkel des Pfostens (gegen die Lotrechte)

$\alpha_R = \gamma_R \dots = \alpha_{R+n} = \gamma_{R+n} = \alpha$.

Mit Hilfe der oben angeführten geometrischen Bezeichnungen lauten die Gleichungen folgendermaßen:

6.1 Stäbe des Tragwerks an den Knoten elastisch und bei den Stützpunkten starre eingespannt

$$\left. \begin{aligned} M_K^{x(R)} &= M_{K,0}^{x(R)} + \frac{2}{l_{Rx}} \left\{ 2(\varphi_K^r \cos \alpha - \varphi_K^t \sin \alpha) + \varphi_{K-1}^r \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_{K-1}^t \sin \alpha - \frac{3}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \Theta}{l_R \sin \alpha} (-\zeta_{K-1}^c + 2\zeta_K^c - \zeta_{K+1}^c) - 3\vartheta_{R,0}^x \right\} \\ M_K^{y(R)} &= M_{K,0}^{y(R)} + \frac{2}{l_{Ry}} \left\{ 2\varphi_K^v + \varphi_{K-1}^v - \frac{3}{l_R} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} (-\zeta_{K-1}^c + 2\zeta_K^c \cos 2\alpha - \zeta_{K+1}^c) - 3\vartheta_{R,0}^y \right\} \\ M_K^{z(R)} &= M_{K,0}^{z(R)} + \frac{1}{l_{Rz}} \left\{ \varphi_K^r \sin \alpha + \varphi_K^t \cos \alpha + \varphi_{K-1}^r \sin \alpha - \varphi_{K-1}^t \cos \alpha \right\} \\ M_{K-1}^{x(R)} &= M_{K-1,0}^{x(R)} + \frac{2}{l_{Rx}} \left\{ 2(\varphi_{K-1}^r \cos \alpha + \varphi_{K-1}^t \sin \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_K^r \cos \alpha - \varphi_K^t \sin \alpha - \frac{3}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} \Theta}{l_R \sin \alpha} (-\zeta_{K-1}^c + 2\zeta_K^c - \zeta_{K+1}^c) - 3\vartheta_{R,0}^x \right\} \\ M_{K-1}^{y(R)} &= M_{K-1,0}^{y(R)} + \frac{2}{l_{Ry}} \left\{ 2\varphi_{K-1}^v + \varphi_K^v - \frac{3}{l_R \sin 2\alpha} (-\zeta_{K-1}^c + 2\zeta_K^c \cos 2\alpha - \zeta_{K+1}^c) - \vartheta_{R,0}^y \right\} \\ M_{K-1}^{z(R)} &= M_{K-1,0}^{z(R)} + \frac{1}{l_{Rz}} \left[-\varphi_{K-1}^r \sin \alpha + \varphi_{K-1}^t \cos \alpha - \varphi_K^r \sin \alpha - \varphi_K^t \cos \alpha \right] \\ M_K^{x(P)} &= M_{K,0}^{x(P)} + \frac{2}{l_{Px}} \left\{ -2\varphi_K^t + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{l_P \cos \Theta \cdot \sin \alpha} (\zeta_K^c - \zeta_{K+1}^c) - 3\vartheta_{P,0}^x \right\} \\ M_K^{y(P)} &= M_{K,0}^{y(P)} + \frac{2}{l_{Py}} \left\{ 2(-\varphi_K^r \cos \Theta + \varphi_K^v \sin \Theta) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{l_P \cos \alpha} (\zeta_K^c + \zeta_{K+1}^c) - 3\vartheta_{P,0}^y \right\} \\ M_K^{z(P)} &= M_{K,0}^{z(P)} + \frac{1}{l_{Pz}} (\varphi_K^r \sin \Theta + \varphi_K^v \cos \Theta) \\ M_K^{x(P)} &= M_{K,0}^{x(P)} + \frac{2}{l_{Px}} \left\{ -\varphi_K^t + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{l_P \cos \Theta \cdot \sin \alpha} (\zeta_K^c - \zeta_{K+1}^c) - 3\vartheta_{P,0}^x \right\} \\ M_K^{y(P)} &= M_{K,0}^{y(P)} + \frac{2}{l_{Py}} \left\{ -\varphi_K^r \cos \Theta + \varphi_K^v \sin \Theta - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{l_P \cos \alpha} (\zeta_K^c + \zeta_{K+1}^c) - 3\vartheta_{P,0}^y \right\} \\ M_K^{z(P)} &= M_{K,0}^{z(P)} - \frac{1}{l_{Pz}} (\varphi_K^r \sin \Theta + \varphi_K^v \cos \Theta) \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

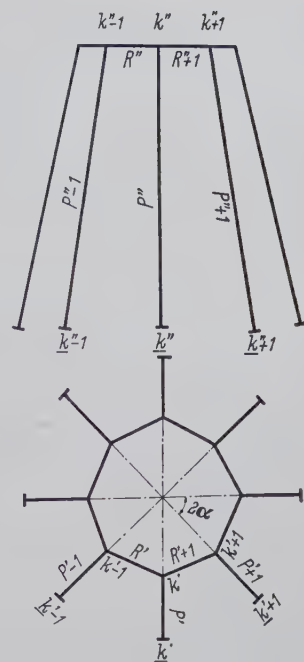


Bild 4. Räumlicher symmetrischer Vieleckrahmen
in Aufriß und Grundriß

6.2 Riegel und Pfosten am Knoten eingespannt und die Pfosten im Fußpunkt gelenkig angeschlossen

Die Gleichungen nach (7) gelten mit Ausnahme von:

$$\left. \begin{aligned} M_K^{x(P)} &= M_{K,0}^{x(P)} + \frac{3}{l_{Px}} \left\{ -\varphi_K^t + \frac{1}{l_P \cos \Theta \cdot \sin 2\alpha} \right. \\ &\quad \left. (\zeta_K^c - \zeta_{K+1}^c) - \vartheta_{P,0}^x \right\} \\ M_K^{y(P)} &= M_{K,0}^{y(P)} + \frac{3}{l_{Py}} \left\{ -\varphi_K^r \cos \Theta + \varphi_K^v \sin \Theta - \frac{\sin \alpha}{l_P \sin 2\alpha} \right. \\ &\quad \left. (\zeta_K^c + \zeta_{K+1}^c) - \vartheta_{P,0}^y \right\} \\ M_K^{z(P)} &= M_{K,0}^{z(P)}, \quad M_{K,0}^{x(P)} = M_{K,0}^{y(P)} = M_{K,0}^{z(P)}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Wenn man in den Gleichungen (7) und (8) $\Theta = 0$ setzt, dann erhält man Gleichungen, die für zyklisch-symmetrische, lotrechte Pfosten gelten.

7. Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen infolge äußerer Lasten; Gleichungs-System

Zur Ermittlung der Unbekannten ($3n$ Knotendrehwinkel und p Stabdrehwinkel) sind $(3n + p)$ Gleichungen notwendig. Die notwendige und hinreichende Anzahl der Bedingungen wird mit dem Prinzip der virtuellen Verrückungen für das Gleichgewicht der äußeren Kräfte aus den unabhängigen, zwangsläufigen Verschiebungszuständen erhalten: also entstehen notwendige Ketten als Knotenkette G_K^v ($v = r, t, v$) und als Stabketten G_K^c . Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ist an jeder dieser zwangsläufigen kinematischen Ketten Null. Sie dienen zur eindeutigen Berechnung der unabhängigen Komponenten φ_K^v , ζ_K^c ($v = r, t, v$), des Verschiebungszustandes, aus dem die Anschlußkräfte $M_K^{R(x,y,z)}$, $M_K^{P(x,y,z)}$ des Hauptsystems nach den Gleichungen (3) und (2) hervorgehen. Die überzähligen Schnittkräfte können somit als homogene lineare Funktion der Grundverformungen aufgefaßt werden. Wir betrachten zunächst das Gleichgewicht eines Knoten.

7.1 Knotengleichungen nach A. Ostenfeld

Die Knotenkette G_K^v entsteht allein aus der Knotenscheibe mit $\varphi_K^v \neq 0$ als Freiwert der Bewegung und der wirkenden äußeren Lasten (siehe Bild 5). Die $3n$ Gleichungen werden aus einem belasteten System entwickelt, in welchem die Einspannung an den Stabenden durch Gelenke ersetzt wird und die entgegengesetzten Momente an den Knoten als äußere Kräfte eingetragen sind.

Die Ostenfeldsche Methode [7] stützt sich auf folgenden Gedankengang:

Jeder Knoten eines elastischen räumlichen Tragwerks führte ohne Berücksichtigung der Normalkräfte eine vierfache Bewegung, drei Drehungen und eine Verschiebung aus. Durch Anschluß der Knoten an feste Lager mit Hilfe von Zusatzgliedern (je 3 Arme und ein starrer Gelenkstab, der weder Drehung, noch eine Verschiebung zuläßt) werden die Bewegungen der Knoten aufgehoben. Die Zusatzglieder müssen als Fiktionen aufgefaßt werden, denen ein bestimmtes physikalisches Verhalten nicht zugeschrieben werden kann. Sie üben je nach Bedarf als starr zu denkende Körper Reaktionen aus. Wird nun das räumliche Tragwerk belastet und werden zugleich beliebige Knotendrehungen und Verschiebungen erzwungen, so bildet man nach Ostenfeld (Engesser) Zwangskräfte und -momente in den Zusatzgliedern durch lineare Zusammensetzung.

Die Zwangskräfte $Z_{KJ}^{\bar{v}}$ werden ohne Mühe aus den Stabendmomenten ermittelt, die ihrerseits nach den Formeln der Gleichungen (5) bis (8) gegeben sind, wenn man nunmehr die im starren System (Knotenkette G_K^v , siehe Bild 5) wirkenden betreffenden Unbekannten gleich $(+1)$ und die übrigen Null setzt. Ebenso ergeben sich die

Belastungsglieder $Z_{K,0}^v$ aus den durch äußere Lasten in der Gelenkkette an den biegesteifen Stabenden entstehenden Einspannmomenten für einzelne Verdrehungen $\varphi_J^v = 0$ ($J = A, B \dots N$).

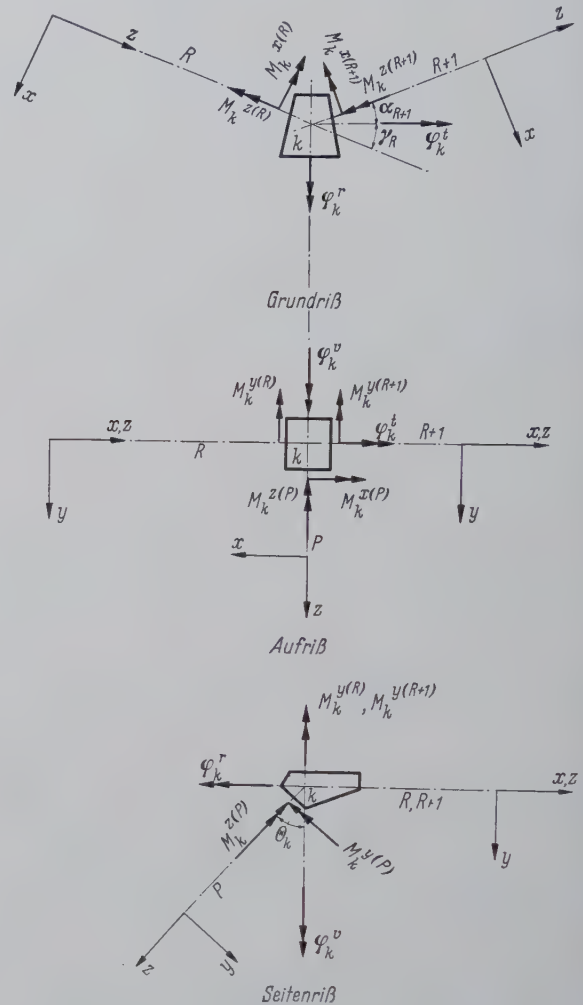


Bild 5. Die Knotenscheibe mit den äußeren Kräften

Für ein unverschiebliches räumliches System lassen sich die allgemeinen Knotengleichungen für Knoten K nach der Ostenfeldschen Methode folgendermaßen darstellen:

$$\left. \begin{aligned} Z_K^r &= \sum_J \varphi_K^r Z_{KJ}^{rr} + \sum_J \varphi_K^t Z_{KJ}^{rt} + \sum_J \varphi_K^v Z_{KJ}^{rv} + \sum_J \zeta_K^c Z_{KJ}^{rc} + Z_{K,0}^r \\ Z_K^t &= \sum_J \varphi_K^r Z_{KJ}^{tr} + \sum_J \varphi_K^t Z_{KJ}^{tt} + \sum_J \varphi_K^v Z_{KJ}^{tv} + \sum_J \zeta_K^c Z_{KJ}^{tc} + Z_{K,0}^t \\ Z_K^v &= \sum_J \varphi_K^r Z_{KJ}^{vr} + \sum_J \varphi_K^t Z_{KJ}^{vt} + \sum_J \varphi_K^v Z_{KJ}^{vv} + \sum_J \zeta_K^c Z_{KJ}^{vc} + Z_{K,0}^v \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$(J = A, B \dots K-1, K+1 \dots N).$

Da die Kräfte Z_K^r , Z_K^t , Z_K^v in Wirklichkeit nicht vorhanden sind, müssen die rechten Seiten der Gleichung (9) Null sein. Damit bilden die Beiwerte Z_{KJ}^{vv} eine Matrix von $3n$ Zeilen und Spalten, die eine Zusammenfassung der linearen $(3n)$ Gleichgewichtsbedingungen darstellen. K. Klöppel wies in seinen Vorlesungen darauf hin, daß die Ostenfeldschen Knotengleichungen den Mannschen Überlegen entsprechen. Bei den Zwangskräften bezeichnet die erste Index-, Kopf- und Fußziffer die Knotenkette, die zweite die Ursache. Für die Beiwerte gilt selbstverständlich der Reziprozitätssatz von Betty

$$Z_{KJ}^{\bar{v}} = Z_{JK}^{\bar{v}v} \dots \dots \dots (10)$$

11 Stäbe des Rahmens an den Knoten und in den Stützpunkten eingespannt

$$\begin{aligned}
 Z_{KK}^{rr} &= -\frac{4}{l'_{Rx}} \cos^2 \gamma_R - \frac{1}{l'_{Rx}} \sin^2 \gamma_R - \frac{4}{l'_{R+1,x}} \cos^2 \alpha_{R+1} - \frac{1}{l'_{R+1,z}} \sin^2 \alpha_{R+1} - \frac{4}{l'_{Py}} \cos^2 \Theta_K - \frac{1}{l'_{Pz}} \sin^2 \Theta_K \\
 Z_{KK}^{rt} &= +\frac{4}{l'_{Rx}} \sin \gamma_R \cdot \cos \gamma_R - \frac{1}{l'_{Rz}} \cos \gamma_R \cdot \sin \gamma_R - \frac{4}{l'_{R+1,x}} \sin \alpha_{R+1} \cdot \cos \alpha_{R+1} + \frac{1}{l'_{R+1,z}} \cos \alpha_{R+1} \cdot \sin \alpha_{R+1} \\
 Z_{KK}^{rv} &= +\frac{4}{l'_{Py}} \sin \Theta_K \cdot \cos \Theta_K - \frac{1}{l'_{Pz}} \cos \Theta_K \cdot \sin \Theta_K \quad Z_{K,K-1}^{rr} = -\frac{2}{l'_{Rx}} \cos \alpha_R \cdot \cos \gamma_R - \frac{1}{l'_{Rz}} \sin \alpha_R \cdot \cos \gamma_R \\
 Z_{K,K+1}^{rr} &= -\frac{2}{l'_{R+1,x}} \cos \gamma_{R+1} \cdot \cos \alpha_{R+1} - \frac{1}{l'_{R+1,z}} \sin \gamma_{R+1} \cdot \sin \alpha_{R+1} \\
 Z_{K,K-1}^{rt} &= -\frac{2}{l'_{Rx}} \sin \alpha_R \cdot \cos \gamma_R + \frac{1}{l'_{Rz}} \cos \alpha_R \cdot \sin \gamma_R \\
 Z_{K,K+1}^{rt} &= +\frac{2}{l'_{R+1,x}} \sin \gamma_{R+1} \cdot \cos \alpha_{R+1} - \frac{1}{l'_{R+1,z}} \cos \gamma_{R+1} \cdot \sin \alpha_{R+1} \\
 Z_{KK}^{rc} &= +\frac{6 \cos \gamma_R}{l'_{Rx} l'_R} \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) - \\
 &\quad - \frac{6 \cos \alpha_{R+1}}{l'_{R+1,x} l'_{R+1}} \cdot \frac{\cos \alpha_{R+1} \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} - \frac{6 \cos \Theta_K}{l'_{Py}} \cdot \frac{\sin \alpha_{R+1}}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\
 Z_{K,K-1}^{rc} &= -\frac{6 \cos \gamma_R}{l'_{Rx} l'_R} \cdot \frac{\cos \alpha_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \\
 Z_{K,K+1}^{rc} &= -\frac{6 \cos \gamma_R}{l'_{Rx} l'_R} \cdot \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{6 \cos \alpha_{R+1}}{l'_{R+1,x} l'_{R+1}} \left(\frac{\cos \alpha_{R+2} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K+1}}{\sin (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} + \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right) - \\
 &\quad - \frac{6 \cos \Theta_K}{l'_{Py} l'_P} \cdot \frac{\sin \gamma_R}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\
 Z_{K,K+2}^{rc} &= \frac{6 \cos \alpha_{R+1}}{l'_{R+1,x} l'_{R+1}} \cdot \frac{\cos \gamma_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K+1}}{\sin (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} \\
 Z_{KK}^{tt} &= -\frac{1}{l'_{Rz}} \cos^2 \gamma_R - \frac{4}{l'_{Rx}} \sin^2 \gamma_R - \frac{4}{l'_{R+1,x}} \sin^2 \alpha_{R+1} - \frac{1}{l'_{R+1,z}} \cos^2 \alpha_{R+1} - \frac{4}{l'_{Px}} \\
 Z_{K,K-1}^{tr} &= +\frac{2}{l'_{Rx}} \cos \alpha_R \cdot \sin \gamma_R - \frac{1}{l'_{Rz}} \sin \alpha_R \cdot \cos \gamma_R \\
 Z_{K,K+1}^{tr} &= -\frac{2}{l'_{R+1,x}} \cos \gamma_{R+1} \cdot \sin \alpha_{R+1} + \frac{1}{l'_{R+1,z}} \sin \gamma_{R+1} \cdot \cos \alpha_{R+1} \\
 Z_{K,K-1}^{tt} &= +\frac{2}{l'_{Rx}} \sin \alpha_R \cdot \sin \gamma_R + \frac{1}{l'_{Rz}} \cos \alpha_R \cdot \cos \gamma_R \\
 Z_{K,K+1}^{tt} &= +\frac{2}{l'_{R+1,x}} \sin \gamma_{R+1} \cdot \sin \alpha_{R+1} + \frac{1}{l'_{R+1,z}} \cos \gamma_{R+1} \cdot \cos \alpha_{R+1} \\
 Z_{KK}^{tc} &= -\frac{6 \sin \gamma_R}{l'_{Rx} l'_R} \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) - \\
 &\quad - \frac{6 \sin \alpha_{R+1}}{l'_{R+1,x} l'_{R+1}} \cdot \frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{6}{l'_{Px} l'_P} \cdot \frac{\cos \alpha_{R+1}}{\cos \Theta_K \cdot \sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\
 Z_{K,K-1}^{tc} &= +\frac{6 \sin \gamma_R}{l'_{Rx} l'_R} \cdot \frac{\cos \alpha_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \\
 Z_{K,K+1}^{tc} &= +\frac{6 \sin \alpha_R}{l'_{Rx} l'_R} \cdot \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{6 \sin \alpha_{R+1}}{l'_{R+1,x} l'_{R+1}} \left(\frac{\cos \alpha_{R+2} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K+1}}{\sin (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} + \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right) - \\
 &\quad - \frac{6}{l'_{Px} l'_P} \cdot \frac{\cos \gamma_R}{\cos \Theta_K \cdot \sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\
 Z_{K,K+2}^{tc} &= -\frac{6 \sin \alpha_{R+1}}{l'_{R+1,x} l'_{R+1}} \cdot \frac{\cos \gamma_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K+1}}{\sin (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} \\
 Z_{KK}^{vv} &= -\frac{4}{l'_{Ry}} - \frac{4}{l'_{R+1,y}} - \frac{1}{l'_{Pz}} \cos^2 \Theta_K - \frac{4}{l'_{Py}} \sin^2 \Theta_K \\
 Z_{KK}^{vr} &= -\frac{1}{l'_{Pz}} \sin \Theta_K \cdot \cos \Theta_K + \frac{4}{l'_{Py}} \cos \Theta_K \cdot \sin \Theta_K \\
 Z_{K,K-1}^{vv} &= -\frac{2}{l'_{Ry}} \quad Z_{K,K+1}^{vv} = -\frac{2}{l'_{R+1,y}} \\
 Z_{KK}^{vc} &= +\frac{6}{l'_{Ry} l'_R} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{l'_{R+1,y} l'_{R+1}} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{6 \sin \Theta_K}{l'_{Py} l'_P} \cdot \frac{\sin \alpha_{R+1}}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\
 Z_{K,K-1}^{vc} &= -\frac{6}{l'_{Ry} l'_R} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \\
 Z_{K,K+1}^{vc} &= -\frac{6}{l'_{Ry} l'_R} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{6}{l'_{R+1,y} l'_{R+1}} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right) + \\
 &\quad + \frac{6 \sin \Theta_K}{l'_{Py} l'_P} \cdot \frac{\sin \gamma_R}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\
 Z_{K,K+2}^{vc} &= \frac{6}{l'_{R+1,y} l'_{R+1}} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})}
 \end{aligned}$$

... (11)

Belastungsglieder:

$$\begin{aligned}
Z_{K,0}^r &= -M_{K,0}^{x(R)} \cos \gamma_R - M_{K,0}^{z(R)} \sin \gamma_R - M_{K,0}^{x(R+1)} \cos \alpha_{R+1} + M_{K,0}^{z(R+1)} \sin \alpha_{R+1} + M_{K,0}^{y(P)} \cos \Theta_K - M_{K,0}^{z(P)} \sin \Theta_K + \\
&\quad + \frac{6}{l'_{Rx}} \vartheta_{R,0}^x \cos \gamma_R + \frac{6}{l'_{R+1,x}} \vartheta_{R+1,0}^x \cos \alpha_{R+1} - \frac{6}{l'_{Py}} \vartheta_{P,0}^y \cos \Theta_K + M_K^r \\
Z_{K,0}^t &= -M_{K,0}^{x(R)} \cos \gamma_R + M_{K,0}^{z(R)} \sin \gamma_R - M_{K,0}^{x(R+1)} \sin \alpha_{R+1} - M_{K,0}^{z(R+1)} \cos \alpha_{R+1} + \\
&\quad + M_{K,0}^{y(P)} - \frac{6}{l'_{Rx}} \vartheta_{R,0}^x \sin \gamma_R + \frac{6}{l'_{R+1,x}} \vartheta_{R+1,0}^x \sin \alpha_{R+1} - \frac{6}{l'_{Px}} \vartheta_{P,0}^x + M_K^t \\
Z_{K,0}^v &= -M_{K,0}^{y(R)} - M_{K,0}^{y(R+1)} \cos \Theta_K - M_{K,0}^{y(P)} \sin \Theta_K + \frac{6}{l'_{Ry}} \vartheta_{R,0}^y + \frac{6}{l'_{R+1,y}} \vartheta_{R+1,0}^y + \frac{6}{l'_{Py}} \vartheta_{P,0}^y \sin \Theta_K + M_K^v
\end{aligned} \quad \dots (12)$$

Die Anschlußmomente und Stabdrehwinkel aus Belastung, Stützenverschiebung und Temperaturänderung sind in Abschnitt 5 enthalten. Die Werte M_K^r , K_K^t , M_K^v entsprechen äußeren Momenten, die Projektionen auf die Richtung der Achsen sind.

7.12 Stäbe in den Knoten eingespannt und im Fußpunkt gelenkig angeschlossen

Die Beiwerte nach (11) gelten mit Ausnahme von:

$$\begin{aligned}
Z_{KK}^{rr} &= -\frac{4}{l'_{Rx}} \cos^2 \gamma_R - \frac{1}{l'_{Rz}} \sin^2 \gamma_R - \frac{4}{l'_{R+1,x}} \cos^2 \alpha_{R+1} - \frac{1}{l'_{R+1,z}} \sin^2 \alpha_{R+1} - \frac{3}{l'_{Ry}} \cos^2 \Theta_K \\
Z_{KK}^{rv} &= Z_{KK}^{vr} = +\frac{3}{l'_{Py}} \sin \Theta_K \cdot \cos \Theta_K \\
Z_{KK}^{rc} &= +\frac{6 \cos \gamma_R}{l'_{Rx} l_R} \left(\frac{\cos \gamma_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) - \frac{6 \cos \alpha_{R+1}}{l'_{R+1,x} l_{R+1}} \cdot \frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} - \\
&\quad - \frac{3 \cos \Theta_K}{l'_{Py} l_P} \cdot \frac{\sin \alpha_{R+1}}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\
Z_{K,K+1}^{rc} &= -\frac{6 \cos \gamma_R}{l'_{Rx} l_R} \cdot \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{6 \cos \alpha_{R+1}}{l'_{R+1,x} l_{R+1}} \left(\frac{\cos \alpha_{R+2} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K+1}}{\sin (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} + \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right) - \\
&\quad - \frac{3 \cos \Theta_K}{l'_{Py} l_P} \cdot \frac{\sin \gamma_R}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\
Z_{KK}^{tt} &= -\frac{4}{l'_{Rx}} \sin^2 \gamma_R - \frac{1}{l'_{Rz}} \cos^2 \gamma_R - \frac{4}{l'_{R+1,x}} \sin^2 \alpha_{R+1} - \frac{1}{l'_{R+1,z}} \cos^2 \alpha_{R+1} - \frac{3}{l'_{Px}} \\
Z_{KK}^{tc} &= -\frac{6 \sin \gamma_R}{l'_{Rx} l_R} \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) - \frac{6 \sin \alpha_{R+1}}{l'_{R+1,x} l_{R+1}} \cdot \frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \\
&\quad + \frac{3}{l'_{Px} l_P} \cdot \frac{\cos \gamma_R}{\cos \Theta_K \cdot \sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\
Z_{K,K+1}^{tc} &= +\frac{6 \sin \gamma_R}{l'_{Rx} l_R} \cdot \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{6 \sin \alpha_{R+1}}{l'_{R+1,x} l_{R+1}} \left(\frac{\cos \alpha_{R+2} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K+1}}{\sin (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} + \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right) - \\
&\quad - \frac{3}{l'_{Px} l_P} \cdot \frac{\cos \gamma_R}{\cos \Theta_K \cdot \sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\
Z_{KK}^{vv} &= -\frac{4}{l'_{Ry}} - \frac{4}{l'_{R+1,y}} - \frac{3}{l'_{Py}} \sin^2 \Theta_K \\
Z_{KK}^{vc} &= +\frac{6}{l'_{Ry} l_R} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) - \frac{6}{l'_{R+1,y} l_{R+1}} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \\
&\quad + \frac{3 \sin \Theta_K}{l'_{Py} l_P} \cdot \frac{\sin \alpha_{R+1}}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\
Z_{K,K+1}^{vc} &= -\frac{6}{l'_{Ry} l_R} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{6}{l'_{R+1,y} l_{R+1}} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right) + \\
&\quad + \frac{3 \sin \Theta_K}{l'_{Py} l_P} \cdot \frac{\sin \gamma_R}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})}
\end{aligned} \quad \dots (13)$$

Belastungsglieder:

$$\begin{aligned}
Z_{K,0}^r &= -M_{K,0}^{x(R)} \cos \gamma_R - M_{K,0}^{z(R)} \sin \gamma_R - M_{K,0}^{x(R+1)} \cos \alpha_{R+1} + M_{K,0}^{z(R+1)} \sin \alpha_{R+1} + M_{K,0}^{y(P)} \cos \Theta_K - M_{K,0}^{z(P)} \sin \Theta_K + \\
&\quad + \frac{6}{l'_{Rx}} \vartheta_{R,0}^x \cos \gamma_R + \frac{6}{l'_{R+1,x}} \vartheta_{R+1,0}^x \cos \alpha_{R+1} - \frac{3}{l'_{Py}} \vartheta_{P,0}^y \cos \Theta_K + M_K^r \\
Z_{K,0}^t &= -M_{K,0}^{x(R)} \cos \gamma_R + M_{K,0}^{z(R)} \sin \gamma_R - M_{K,0}^{x(R+1)} \sin \alpha_{R+1} - M_{K,0}^{z(R+1)} \cos \alpha_{R+1} + \\
&\quad + M_{K,0}^{y(P)} - \frac{6}{l'_{Rx}} \vartheta_{R,0}^x \sin \gamma_R + \frac{6}{l'_{R+1,x}} \vartheta_{R+1,0}^x \sin \alpha_{R+1} - \frac{3}{l'_{Px}} \vartheta_{P,0}^x + M_K^t \\
Z_{K,0}^v &= -M_{K,0}^{y(R)} - M_{K,0}^{y(R+1)} \cos \Theta_K - M_{K,0}^{y(P)} \sin \Theta_K + \frac{6}{l'_{Ry}} \vartheta_{R,0}^y + \frac{6}{l'_{R+1,y}} \vartheta_{R+1,0}^y + \frac{3}{l'_{Py}} \vartheta_{P,0}^y \sin \Theta_K + M_K^v
\end{aligned} \quad \dots (14)$$

Die Komponenten sind in Gleichung (12) erklärt.

7.2 Gleichgewichtsbedingungen an der allgemeinen zwangsläufigen kinematischen

Kette G_K^c nach L. Mann [4]

Die kinematische Kette wurde in den Abschnitten 2 bis 5 erläutert. Außerdem wurde für den Freiwert ζ_K^c der Verschiebungszustand dargestellt. Die zwangsläufige kinematische Kette G_K^c mit $\zeta_K^c = 0$ in Bild 3 ist eine Gelenk- oder Knotenkette. Sie besteht aus den Knotenscheiben und einzelnen Stäben oder Stabgruppen. Die Bewegung bleibt in der Regel auf einen Abschnitt der Gelenkkette beschränkt. Dabei können sich die abhängigen Komponenten des Verschiebungszustandes des Hauptsystems ändern, jedoch sind alle unabhängigen Komponenten φ_J^v, ζ_J^c außer ζ_K^c Null. Entsprechend der p -fachen Bewegungsfreiheit lassen sich an der Kette p voneinander unabhängige Verschiebungszustände anbringen, bei welchen der Knoten die Verschiebungen $\zeta_J^c = 1$ ($J = A, B \dots K \dots N$) ausführen kann. Es ist zu beachten, daß die an einem Kragarm angreifende Last parallel verschoben im Knoten wirkend zu denken ist.

Wir können nunmehr nach dem Verfahren von L. Mann die Netzgleichungen berechnen.

Durch die Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen für den Verschiebungszustand $\zeta_K^c = +1$ erzielt man folgende Ergebnisse:

$$\Phi = \sum_R \left[(M_{K-1}^{x(R)} + M_K^{x(R)}) \vartheta_{RK}^{xc} + (M_{K-1}^{y(R)} + M_K^{y(R)}) \vartheta_{RK}^{yc} \right] + \sum_P \left[(M_K^{x(P)} + M_K^{x(P)}) \vartheta_{PK}^{xc} + (M_K^{y(P)} + M_K^{y(P)}) \vartheta_{PK}^{yc} \right] + A_L = 0 \quad (15)$$

Die Summe erstreckt sich über Riegel und Pfosten der Kette G_K^c nach Bild (3). Durch den Bewegungszustand $\zeta_K^c = +1$ wurde eine

virtuelle Arbeit für die Komponente des Verschiebungszustandes herbeigeführt, die von den Stabendmomenten und der Belastung hervorgerufen wird. Die damit entstehende Gleichung kann in vereinfachter Form wie folgt wiedergegeben werden [4], [8]:

$$\Pi A_K^c = 0 = Z_{KK}^{cc} \zeta_K^c + \sum_J Z_{KJ}^{cc} \zeta_K^c + \sum_v \left(Z_{KK}^{cv} \varphi_K^v + \sum_J Z_{KJ}^{cv} \varphi_J^v \right) + Z_{K,0}^c \quad \left. \vphantom{\sum_J} \right\} \quad (16)$$

$$v = r, t, v \quad (J = A, B \dots K-1, K+1 \dots N)$$

Die Beiwerte Z_{KK}^{cv}, Z_{KJ}^{cv} der virtuellen Arbeit der Anschlußmomente aus $\zeta_K^c = 1$ sind in der Gleichung (9) entwickelt. Ebenso die Anteile Z_{KK}^{cc}, Z_{KJ}^{cc} der virtuellen Arbeit des Anschlußmomentes aus $\zeta_K^c = 1, \zeta_J^c = 1$ mit dem Stabdrehwinkel $\vartheta_{RK}^{(x,y)c}$ nach den Gleichungen (4), (5) und (6). Die Beiwerte, die in Gleichung (15) für den betreffenden Komponenten des Verschiebungszustandes eingesetzt sind, sind gleich ($\neq 1$), alle anderen gleich Null. Der Anteil der virtuellen Arbeit $Z_{K,0}^c$ geht hervor aus der Belastung P , dem Anschlußmoment aus der Belastung P , aus den Temperaturänderungen t , Δt und aus den Stützenverschiebungen.

Die Mann'sche Netzgleichung ist dem Ostenfeld'schen Verfahren entschieden vorzuziehen.

Für die Beiwerte Z gilt der Reziprozitätssatz von Betty.

$$Z_{KJ}^{vc} = Z_{JK}^{cv} \quad (v = r, t, v) \quad (J = A, B \dots K-1, K, K+1 \dots N)$$

Die Werte $Z_{KK}^{cc}, Z_{KJ}^{cc}, Z_{K,0}^c$ werden für den Anschluß des Stabes am Knoten und Stützpunkt folgendermaßen entwickelt.

7.21 Stäbe an den Knoten und Stützpunkten eingespannt.

$$\begin{aligned} Z_{KK}^{cc} &= - \frac{12}{l_{R-1,x}^2 (l_{R-1})^2} \left(\frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right)^2 - \frac{12}{l_{Rx}^2 (l_R)^2} \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right)^2 \\ &\quad + \frac{12}{l_{R+1,x}^2 (l_{R+1})^2} \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right)^2 - \frac{12}{l_{R-1,y}^2 (l_{R-1})^2} \left(\frac{1}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right)^2 - \frac{12}{l_{Ry}^2 (l_R)^2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \left(\frac{1}{l_{R+1,y}^2 (l_{R+1})^2} \left(\frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right)^2 - \frac{12}{l_{P-1,x}^2 (l_{P-1})^2} \left(\frac{\cos \Theta_{K-1}}{\cos \Theta_{K-1} \cdot \sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{12}{l_{Px}^2 (l_P)^2} \left(\frac{\cos \alpha_{R+1}}{\cos \Theta_K \cdot \sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right)^2 - \frac{12}{l_{P-1,y}^2 (l_{P-1})^2} \left(\frac{\sin \gamma_{R-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right)^2 - \frac{12}{l_{Py}^2 (l_P)^2} \left(\frac{\sin \alpha_{R+1}}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right)^2 \right) \\ Z_{K,K-1}^{cc} &= + \frac{12}{l_{R-1,x}^2 (l_{R-1})^2} \left(\frac{\cos \alpha_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} + \frac{\cos \gamma_{R-2} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-2}}{\sin (\gamma_{R-2} + \alpha_{R-1})} \right) \left(\frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) + \frac{12}{l_{Rx}^2 (l_R)^2} \\ &\quad \frac{\cos \alpha_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) + \frac{12}{l_{R-1,y}^2 (l_{R-1})^2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-2} + \alpha_{R-1})} \right) \frac{1}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} + \frac{12}{l_{Ry}^2 (l_R)^2} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) \\ &\quad + \frac{12}{l_{P-1,x}^2 (l_{P-1})^2} \cdot \frac{\cos \alpha_R \cdot \cos \gamma_{R-1}}{[\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R) \cos \Theta_{K-1}]^2} - \frac{12}{l_{P-1,y}^2 (l_{P-1})^2} \cdot \frac{\sin \alpha_R \cdot \sin \alpha_{R-1}}{\sin^2 (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \\ Z_{K,K+1}^{cc} &= + \frac{12}{l_{Rx}^2 (l_R)^2} \cdot \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) + \frac{12}{l_{R+1,x}^2 (l_{R+1})^2} \\ &\quad \left(\frac{\cos \alpha_{R+2} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K+1}}{\sin (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} + \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right) \frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{12}{l_{Ry}^2 (l_R)^2} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\ &\quad \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) + \frac{12}{l_{R+1,y}^2 (l_{R+1})^2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right) \\ &\quad \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{12}{l_{Px}^2 (l_P)^2} \cdot \frac{\cos \gamma_R \cdot \cos \alpha_{R+1}}{\cos^2 \Theta_K \cdot \sin^2 (\gamma_R + \alpha_{R+1})} - \frac{12}{l_{Py}^2 (l_P)^2} \cdot \frac{\sin \gamma_R \cdot \sin \alpha_{R+1}}{\sin^2 (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\ Z_{K,K-2}^{cc} &= - \frac{12}{l_{R-1,x}^2 (l_{R-1})^2} \cdot \frac{\cos \alpha_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-2}}{\sin (\gamma_{R-2} + \alpha_{R-1})} \cdot \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} - \frac{12}{l_{R-1,y}^2 (l_{R-1})^2} \\ &\quad \frac{1}{\sin (\gamma_{R-2} + \alpha_{R-1})} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \\ Z_{K,K+2}^{cc} &= - \frac{12}{l_{R+1,x}^2 (l_{R+1})^2} \cdot \frac{\cos \gamma_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K+1}}{\sin (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} \cdot \frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} - \frac{12}{l_{R+1,y}^2 (l_{R+1})^2} \\ &\quad \frac{1}{\sin (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \end{aligned} \quad \dots (17)$$

Belastungsglieder:

$$Z_{K,0}^c = \sum_R \left[\left(M_{K-1,0}^{x(R)} + M_{K,0}^{x(R)} - \frac{12}{l_{Rx}} \vartheta_{R,0}^x \right) \vartheta_{RK}^{xc} + \left(M_{K-1,0}^{y(R)} + M_{K,0}^{y(R)} - \frac{12}{l_{Ry}} \vartheta_{R,0}^y \right) \vartheta_{RK}^{yc} \right] + \left. \begin{aligned} & + \sum_P \left[\left(M_{K,0}^{x(P)} + M_{K,0}^{x(P)} - \frac{12}{l_{Px}} \vartheta_{P,0}^x \right) \vartheta_{PK}^{xc} + \left(M_{K,0}^{y(P)} + M_{K,0}^{y(P)} - \frac{12}{l_{Py}} \vartheta_{P,0}^y \right) \vartheta_{PK}^{yc} \right] + A_L \end{aligned} \right\} \quad \dots (18)$$

Die Anschlußmomente und Stabdrehwinkel ergeben sich aus der Belastung und Stützenverschiebung sowie aus der Temperaturänderung. A_L ist die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte. Wenn die Kraft und Verschiebung in gleiche Richtung gehen, ist die virtuelle Arbeit positiv.

7.22 Stäbe an den Knoten eingespannt und an den Fußpunkten gelenkig angeschlossen.

$$\begin{aligned} Z_{KK}^{cc} &= - \frac{12}{l_{R-1,x}^2 (l_{R-1})^2} \left(\frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right)^2 - \frac{12}{l_{Rx}^2 (l_R)^2} \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right)^2 \\ &\quad - \frac{12}{l_{R+1,x}^2 (l_{R+1})^2} \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right)^2 - \frac{12}{l_{R-1,y}^2 (l_{R-1})^2} \left(\frac{1}{\sin^3 (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) - \frac{12}{l_{Ry}^2 (l_R)^2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right)^2 - \frac{12}{l_{R+1,y}^2 (l_{R+1})^2} \left(\frac{1}{\sin^2 (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right) - \frac{3}{l_{P-1,x}^2 (l_{P-1})^2} \left(\frac{\cos \Theta_{K-1} \cdot \sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)}{\cos \gamma_{R-1}} \right)^2 \\ &\quad - \frac{3}{l_{Px}^2 (l_P)^2} \left(\frac{\cos \alpha_{R+1}}{\cos \Theta_K \cdot \sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right)^2 - \frac{3}{l_{P-1,y}^2 (l_{P-1})^2} \left(\frac{\sin \gamma_{R-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right)^2 - \frac{3}{l_{Py}^2 (l_P)^2} \left(\frac{\sin \alpha_{R+1}}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right)^2 \\ Z_{K,K-1}^{cc} &= + \frac{12}{l_{R-1,x}^2 (l_{R-1})^2} \left(\frac{\cos \alpha_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} + \frac{\cos \gamma_{R-2} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-2}}{\sin (\gamma_{R-2} + \alpha_{R-1})} \right) \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} + \frac{12}{l_{Rx}^2 (l_R)^2} \\ &\quad \frac{\cos \alpha_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) + \frac{12}{l_{R-1,y}^2 (l_{R-1})^2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-2} + \alpha_{R-1})} \right) \frac{1}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} + \frac{12}{l_{Ry}^2 (l_R)^2} \frac{1}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) \\ &\quad + \frac{3}{l_{P-1,x}^2 (l_{P-1})^2} \frac{\cos \alpha_R \cdot \cos \gamma_{R-1}}{\cos^2 \Theta_{K-1} \cdot \sin^2 (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} - \frac{3}{l_{P-1,y}^2 (l_{P-1})^2} \frac{\sin \alpha_R \cdot \sin \gamma_{R-1}}{\sin^2 (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \\ Z_{K,K+1}^{cc} &= + \frac{12}{l_{Rx}^2 (l_R)^2} \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) + \frac{12}{l_{R+1,y}^2 (l_{R+1})^2} \\ &\quad \left(\frac{\cos \alpha_{R+2} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K+1}}{\sin (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} + \frac{\cos \gamma_R \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right) \left(\frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right) + \frac{12}{l_{Ry}^2 (l_R)^2} \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\ &\quad \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \right) + \frac{12}{l_{R+1,x}^2 (l_{R+1})^2} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} + \frac{1}{\operatorname{tg} (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right) \\ &\quad \left(\frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \right) + \frac{3}{l_{Px}^2 (l_P)^2} \frac{\cos \gamma_R \cdot \cos \alpha_{R+1}}{\cos^2 \Theta_K \cdot \sin^2 (\gamma_R + \alpha_{R+1})} - \frac{3}{l_{Py}^2 (l_P)^2} \frac{\sin \gamma_R \cdot \sin \alpha_{R+1}}{\sin^2 (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\ Z_{K,K-2}^{cc} &= - \frac{12}{l_{R-1,x}^2 (l_{R-1})^2} \frac{\cos \alpha_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-2}}{\sin (\gamma_{R-2} + \alpha_{R-1})} \cdot \frac{\cos \gamma_{R-1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K-1}}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \\ &\quad - \frac{12}{l_{R-1,y}^2 (l_{R-1})^2} \frac{1}{\sin (\gamma_{R-2} + \alpha_{R-1})} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_{R-1} + \alpha_R)} \\ Z_{K,K+2}^{cc} &= - \frac{12}{l_{R+1,x}^2 (l_{R+1})^2} \frac{\cos \gamma_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_{K+1}}{\sin (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} \cdot \frac{\cos \alpha_{R+1} \cdot \operatorname{tg} \Theta_K}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \\ &\quad - \frac{12}{l_{R+1,y}^2 (l_{R+1})^2} \frac{1}{\sin (\gamma_{R+1} + \alpha_{R+2})} \cdot \frac{1}{\sin (\gamma_R + \alpha_{R+1})} \end{aligned} \quad \dots (19)$$

Belastungsglieder:

$$Z_{K,0}^c = \sum_R \left[\left(M_{K-1,0}^{x(R)} + M_{K,0}^{x(R)} - \frac{12}{l_{Rx}} \vartheta_{R,0}^x \right) \vartheta_{RK}^{xc} + \left(M_{K-1,0}^{y(R)} + M_{K,0}^{y(R)} - \frac{12}{l_{Ry}} \vartheta_{R,0}^y \right) \vartheta_{RK}^{yc} \right] + \left. \begin{aligned} & + \sum_P \left[\left(M_{K,0}^{x(P)} - \frac{3}{l_{Px}} \vartheta_{P,0}^x \right) \vartheta_{PK}^{xc} + \left(M_{K,0}^{y(P)} - \frac{3}{l_{Py}} \vartheta_{P,0}^y \right) \vartheta_{PK}^{yc} \right] + A_L \end{aligned} \right\} \quad \dots (20)$$

Mit den Gleichungen (11) bis (14) und (17) bis (20) sind alle Vorzeichen und Belastungsglieder der Matrix der Gleichgewichtsbedingungen für das allgemeine räumliche Tragwerk mit (n) Knoten in allgemeiner Form bekannt.

(Fortsetzung folgt)

Beuluntersuchung für eine orthotrope Platte mit Hohlsteifen unter Schub und Druckbelastung

Von Dipl.-Ing. Horst Witte, Darmstadt

DK 624.075.4

1. Aufgabenstellung

Es soll die Beulbedingung für eine orthotrope Platte mit randparallelen Hohlsteifen aufgestellt werden. Hierbei wird der Torsionswiderstand der Hohlsteifen berücksichtigt. Da bei geschlossenen Profilen der Einfluß des Wölbwiderstandes gegenüber dem Torsionswiderstand gering ist, wird die Querschnittsverwölbung vernachlässigt.

Die Aufgabe wird mit Hilfe der Energiemethode gelöst. Im vorliegenden Fall werden Naviersche Randbedingungen betrachtet. Grundsätzlich gilt die aufgestellte Theorie auch für andere Lagerungen, doch führt die Integration der Ansatzfunktionen in vielen Fällen zu einem großen Aufwand.

2. Bezeichnungen

Für die Belastung, die Abmessungen der Platte sowie die Vorzeichen der Schnittgrößen gelten Bild 1 und 2. Ferner gelten folgende Bezeichnungen:

- $\frac{\partial (\dots)}{\partial x} = (\dots)'$,
 $\frac{\partial (\dots)}{\partial y} = (\dots)''$,
 u, v, w = Verschiebungen in x -, y -, z -Richtung,
 S = statisches Moment der Hohlsteife, bezogen auf die Blechmittelfläche,
 J = Trägheitsmoment der Steife,
 J_D = Torsionswiderstand der Steife,
 f = Fläche der Steife,
 e = Schwerpunkt eines Schnittes $x = \text{const}$,
 z_M = Schubmittelpunkt.

Außerdem gelten folgende dimensionslose Abkürzungen:

$$\eta = \frac{e}{b}, \quad \dots \quad (1)$$

$$\zeta = \frac{z_M}{b}, \quad \text{mit } z_M = \frac{s_B \cdot t_h}{s_B \cdot t_h + s_h \cdot t} \cdot \frac{F_i}{s}, \quad \dots \quad (2)$$

$$c_1 = 1 + (1 - \mu^2) \frac{12 J}{s \cdot t^3}, \quad \dots \quad (3)$$

$$c_2 = 2 + 6 (1 - \mu) \frac{J_D}{s \cdot t^3}, \quad \dots \quad (4)$$

$$c_3 = (1 - \mu^2) 12 \frac{S \cdot b}{s \cdot t^3}, \quad \dots \quad (5)$$

$$c_4 = 6 (1 - \mu) \frac{J_D}{2 F_i} \cdot \frac{s_B}{s} \cdot \frac{b}{t} \cdot \frac{s_B \cdot t_h}{s_B \cdot t_h (1 - s_B/s) + s_h \cdot t}, \quad \dots \quad (6)$$

$$c_5 = 12 \left[1 + (1 - \mu^2) \frac{f}{s \cdot t} \right] \frac{b^2}{t^2}, \quad \dots \quad (7)$$

$$c_6 = 12 \frac{b^2}{t^2}, \quad \dots \quad (8)$$

$$c_7 = 6 (1 - \mu) \frac{b^2}{t^2} \cdot \frac{s_B \cdot t_h}{s_B \cdot t_h (1 - s_B/s) + s_h \cdot t}, \quad \dots \quad (9)$$

$$\kappa_0 = \frac{N_x}{N}, \quad \dots \quad (10a)$$

$$\kappa_1 = \frac{N_y}{N}, \quad \dots \quad (10b)$$

$$\kappa_2 = \frac{N_{xy}}{N}, \quad \dots \quad (10c)$$

Mit dem Beulwert k ist die kritische Beullast

$$N_B = - \frac{E t^3}{12 (1 - \mu^2)} \cdot \frac{\alpha^2 \pi^2}{a^2} k, \quad \dots \quad (11)$$

3. Elastizitätsgesetz für die Schnittgrößen

$$n_x = \frac{E t}{1 - \mu^2} (u' + \mu v') + E \left(\frac{f}{S} u' - \frac{S}{s} w'' \right), \quad \dots \quad (12)$$

$$n_y = \frac{E t}{1 - \mu^2} (v' + \mu u'), \quad \dots \quad (13)$$

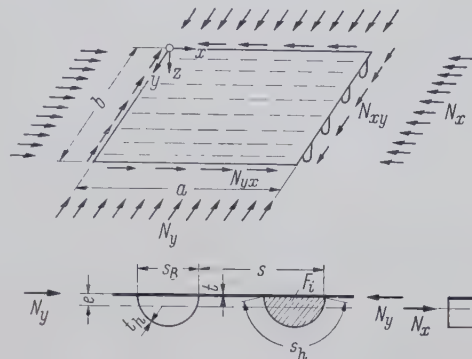


Bild 1. Geometrie und Belastung der Platte

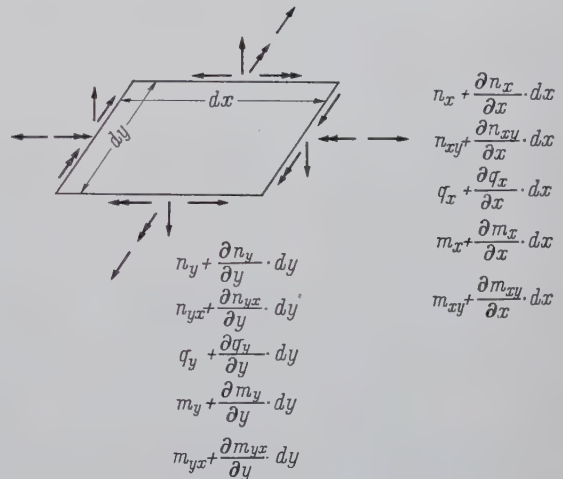


Bild 2. Schnittgrößen

$$n_{xy} = \frac{E t}{2 (1 + \mu)} \left[(u' + v') - \frac{J_D}{2 F_i} \cdot \frac{s_B}{s \cdot t} w' \right] \cdot \xi \quad \dots \quad (14)$$

$$\text{mit } \xi = \frac{s_B \cdot t_h + s_h \cdot t}{s_B \cdot t_h (1 - s_B/s) + s_h \cdot t} \quad \dots \quad (15)$$

$$m_x = - \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{t^3}{12} (w'' + \mu w'') + E \left(\frac{S}{s} u' - \frac{J}{s} w'' \right), \quad (16)$$

$$m_y = - \frac{E}{1 - \mu^2} \cdot \frac{t^3}{12} (w'' + \mu w''), \quad \dots \quad (17)$$

$$m_{yx} = - \frac{E t^3}{12 (1 + \mu)} w'', \quad \dots \quad (18)$$

$$m_{xy} = - \frac{E t^3}{12 (1 + \mu)} w'' - \frac{E t}{2 (1 + \mu)} \left[\frac{J_D}{s \cdot t} \xi w' - \frac{J_D}{2 F_i} \cdot \frac{s_B}{s \cdot t} \xi (u' + v') \right], \quad \dots \quad (19)$$

Hierin ist der Anteil aus der Versteifung

$$m_{xyh} = - \frac{E t}{2 (1 + \mu)} \cdot \frac{J_D}{s \cdot t} \xi \left[w' - \frac{s_B}{2 F_i} (u' + v') \right], \quad \dots \quad (20)$$

Die Gleichungen (12) bis (19) sind von A. Pflüger [1] angegeben¹⁾, wobei jedoch die in Bild 2 festgelegten Vorzeichenregeln zu beachten sind.

4. Differentialgleichungen

Aus den in Abschnitt 3 angegebenen Beziehungen lassen sich mit den Gleichgewichtsbedingungen die Differentialgleichungen ermitteln.

$$\left[1 + (1 - \mu^2) \frac{f}{s \cdot t} \right] u'' + \left(\mu + \frac{1 - \mu}{2} \xi \right) v'' - (1 - \mu^2) \frac{S}{s \cdot t} w''' - \frac{1 - \mu}{2} \xi \frac{J_D}{2 F_i} \cdot \frac{s_B}{s \cdot t} w'' - N_y u'' + N_{xy} z_M w'' = 0, \quad \dots \quad (21)$$

¹⁾ Eine Druckfehlerberichtigung zu [1] erfolgte in dem Bericht [5].

		B_{11}	B_{13}	B_{15}	B_{22}	B_{31}	B_{33}	B_{44}	B_{51}
$\alpha (\mu e_0 + c_7)$		$\alpha^2 e_0 + c_7$ $-\pi^2 k x_0$							
	$3 \alpha (\mu e_0 + c_7)$		$9 \alpha^2 e_0 + c_7$ $-\pi^2 k x_0$	$25 \alpha^2 e_0 + c_7$ $-\pi^2 k x_0$					
		$5 \alpha (\mu e_0 + c_7)$			$4 \alpha^2 e_0 + 4 c_7$ $\pi^2 k x_0 \cdot 4$				
			$3 \alpha (\mu e_0 + c_7)$			$\alpha^2 e_0 + 9 c_7$ $-\pi^2 k x_0 \cdot 9$		B	
	AB			$9 \alpha (\mu e_0 + c_7)$			$9 \alpha^2 e_0 + 9 c_7$ $-\pi^2 k x_0 \cdot 9$		
					$16 \alpha (\mu e_0 + c_7)$			$16 \alpha^2 e_0 + 16 c_7$ $-\pi^2 k x_0 \cdot 16$	
						$5 \alpha (\mu e_0 + c_7)$			$\alpha^2 e_0 + 25 c_7$ $-\pi^2 k x_0 \cdot 25$
A_{11}	4_{13}	A_{22}	A_{31}	A_{33}	A_{44}	A_{51}			

		C_{11}	C_{13}	C_{15}	C_{22}	C_{31}	C_{33}	C_{44}	C_{51}
$e_5 + \alpha^2 e_7$ $-\pi^2 k x_1 \cdot \alpha^2$		$-\alpha c_4$ $+\pi^2 k x_0 \cdot \alpha \eta$							
	$e_5 + 9 \alpha^2 e_7$ $-\pi^2 k x_1 \cdot 9 \alpha^2$		$-3 \alpha c_4$ $+\pi^2 k x_0 \cdot 3 \alpha \eta$						
		$e_5 + 25 \alpha^2 e_7$ $-\pi^2 k x_1 \cdot 25 \alpha^2$		$-5 \alpha c_4$ $+\pi^2 k x_0 \cdot 5 \alpha \eta$					
		$4 e_5 + 4 \alpha^2 e_7$ $-\pi^2 k x_1 \cdot 4 \alpha^2$			$-8 \alpha c_4$ $+\pi^2 k x_0 \cdot 8 \alpha \eta$				
	AA		$9 e_5 + \alpha^2 e_7$ $-\pi^2 k x_1 \cdot \alpha^2$			$-9 \alpha c_4$ $+\pi^2 k x_0 \cdot 9 \alpha \eta$		BC	
				$9 e_5 + 9 \alpha^2 e_7$ $-\pi^2 k x_1 \cdot 9 \alpha^2$			$-27 \alpha c_4$ $+\pi^2 k x_0 \cdot 27 \alpha \eta$		
					$16 e_5 + 16 \alpha^2 e_7$ $-\pi^2 k x_1 \cdot 16 \alpha^2$			$-64 \alpha c_4$ $+\pi^2 k x_0 \cdot 64 \alpha \eta$	
						$25 e_5 + \alpha^2 e_7$ $-\pi^2 k x_1 \cdot \alpha^2$			$-25 \alpha c_4$ $+\pi^2 k x_0 \cdot 25 \alpha \eta$
A_{11}	A_{13}	A_{15}	A_{31}	A_{33}	A_{44}	A_{51}			

T a f e l 2. Teilmatrizen zu Tafel 1 (Fortsetz.)

C_{11}	C_{13}	C_{15}	C_{22}	C_{31}	C_{33}	C_{44}	C_{51}
$-c_3 - a^2 c_4$			$-\pi^2 k \kappa_2 \cdot 2,882 02 a \zeta$			$-\pi^2 k \kappa_2 \cdot 1,844 96 a \zeta$	
	$-c_3 - 9 a^2 c_4$		$+\pi^2 k \kappa_2 \cdot 5,187 64 a \zeta$			$-\pi^2 k \kappa_2 \cdot 2,961 37 a \zeta$	
		$-c_3 - 25 a^2 c_4$	$+\pi^2 k \kappa_2 \cdot 2,058 59 a \zeta$			$+\pi^2 k \kappa_2 \cdot 15,370 80 a \zeta$	
$-\pi^2 k \kappa_2 \cdot 0,360 25 a \zeta$	$+\pi^2 k \kappa_2 \cdot 0,648 46 a \zeta$	$+\pi^2 k \kappa_2 \cdot 0,257 32 a \zeta$	$-8 c_3 - 8 a^2 c_4$	$+\pi^2 k \kappa_2 \cdot 1,459 02 a \zeta$	$-\pi^2 k \kappa_2 \cdot 10,504 93 a \zeta$		$+\pi^2 k \kappa_2 \cdot 6,433 09 a \zeta$
	$A C$		$+\pi^2 k \kappa_2 \cdot 1,729 21 a \zeta$	$-27 c_3 - 3 a^2 c_4$		$-\pi^2 k \kappa_2 \cdot 0,98 8 12 a \zeta$	
			$-\pi^2 k \kappa_2 \cdot 3,112 59 a \zeta$	$-27 c_3 - 27 a^2 c_4$		$-\pi^2 k \kappa_2 \cdot 25,408 87 a \zeta$	
$-\pi^2 k \kappa_2 \cdot 0,028 82 a \zeta$	$-\pi^2 k \kappa_2 \cdot 0,155 27 a \zeta$	$+\pi^2 k \kappa_2 \cdot 0,240 17 a \zeta$		$-\pi^2 k \kappa_2 \cdot 1,667 46 a \zeta$	$-\pi^2 k \kappa_2 \cdot 10,719 37 a \zeta$	$-64 c_3 - 64 a^2 c_4$	$+\pi^2 k \kappa_2 \cdot 6,004 22 a \zeta$
			$+\pi^2 k \kappa_2 \cdot 0,411 72 a \zeta$			$+\pi^2 k \kappa_2 \cdot 3,074 15 a \zeta$	$-125 c_3 - 5 a^2 c_4$

C_{11}	C_{13}	C_{15}	C_{22}	C_{31}	C_{33}	C_{44}	C_{51}
$a^4 + c_1 + a^2 c_2$ $-\pi^2 k a^2$ $\left[\left(\frac{1}{\pi^2} + 9 \eta^2 \right) x_0 + \frac{a^2}{\pi^2} x_1 \right]$			$+\pi^2 k \kappa_2 (0,146 01 a + 3,60 253 \zeta^2)$			$+\pi^2 k \kappa_2 (0,023 36 a + 1,95 978 \zeta^2)$	
	$81 a^4 + c_1 + 9 a^2 c_2$ $-\pi^2 k a^2$ $\left[\left(\frac{1}{\pi^2} + 9 \eta^2 \right) x_0 + 9 \frac{a^2}{\pi^2} x_1 \right]$		$-\pi^2 k \kappa_2 (0,262 81 a + 6,48 456 \zeta^2)$			$+\pi^2 k \kappa_2 (0,150 18 a + 12,59 856 \zeta^2)$	
	$625 a^4 + c_1 + 25 a^2 c_2$ $-\pi^2 k a^2$ $\left[\left(\frac{1}{\pi^2} + 25 \eta^2 \right) x_0 + 25 \frac{a^2}{\pi^2} x_1 \right]$		$-\pi^2 k \kappa_2 (0,104 29 a + 2,57 324 \zeta^2)$			$-\pi^2 k \kappa_2 (0,194 67 a + 16,33 147 \zeta^2)$	
			$16 a^4 + 16 c_1 + 16 a^2 c_2$ $-\pi^2 k a^2$ $\left[\left(\frac{4}{\pi^2} + 16 \eta^2 \right) x_0 + 4 \frac{a^2}{\pi^2} x_1 \right]$	$-\pi^2 k \kappa_2 (0,262 81 a + 16,85 984 \zeta^2)$	$+\pi^2 k \kappa_2 (0,473 06 a + 30,34 771 \zeta^2)$		$-\pi^2 k \kappa_2 (0,104 29 a + 14,92 477 \zeta^2)$
	$C C$			$a^4 + 81 c_1 + 9 a^2 c_2$ $-\pi^2 k a^2$ $\left[\left(\frac{9}{\pi^2} + 9 \eta^2 \right) x_0 + \frac{a^2}{\pi^2} x_1 \right]$		$+\pi^2 k \kappa_2 (0,150 18 a + 18,52 730 \zeta^2)$	
					$81 a^4 + 81 c_1 + 81 a^2 c_2$ $-\pi^2 k a^2$ $\left[\left(\frac{9}{\pi^2} + 81 \eta^2 \right) x_0 + 9 \frac{a^2}{\pi^2} x_1 \right]$	$+\pi^2 k \kappa_2 (0,965 42 a + 119,10 408 \zeta^2)$	
						$256 a^4 + 256 c_1 + 256 a^2 c_2$ $-\pi^2 k a^2$ $\left[\left(\frac{16}{\pi^2} + 256 \eta^2 \right) x_0 + 16 \frac{a^2}{\pi^2} x_1 \right]$	$-\pi^2 k \kappa_2 (0,194 67 a + 39,65 786 \zeta^2)$
							$a^4 + 625 c_1 + 25 a^2 c_2$ $-\pi^2 k a^2$ $\left[\left(\frac{25}{\pi^2} + 25 \eta^2 \right) x_0 + \frac{a^2}{\pi^2} x_1 \right]$

Für reine Schubbelastung entfällt der Einfluß von v . Auch für kombinierte Schub- und Druckbelastung ist v von verschwindend kleinem Einfluß. Aus diesem Grunde kann man sich auf die 16-gliedrige Beulterminante beschränken.

Für eine Vorberechnung kann man die 8-gliedrige Determinante „CC“ benutzen. Da die Energiemethode bei ungenauen Ansätzen zu hohe Werte liefert, ist das Ergebnis aus „CC“ sicherheitshalber mit dem Abminderungsfaktor $\varrho = 0,8$ zu multiplizieren. Dieser Faktor stellt jedoch nur eine Empfehlung dar.

3. Beulbedingungen in Determinantenform

Für reinen Druck gilt die Determinante (38)

B	A	C
$m^2 c_7 + n^2 \alpha^2 c_8 - m^2 \pi^2 k \kappa_0$	$m n \alpha (\mu c_6 + c_7)$	$- m^2 n \alpha c_4 + \gamma_1 m^2 n \alpha \gamma^2 k \kappa_0$
	$m^2 c_5 + n^2 \alpha^2 c_7 - n^2 \alpha^2 \pi^2 k \kappa_1$	$- m^3 c_3 - m n^2 \alpha^2 c_4$
		$m^4 c_1 + n^4 \alpha^4 + m^2 n^2 \alpha^2 c_2 - \alpha^2 \pi^2 k \left[\left(m^2 n^2 \eta + \frac{m^2}{\pi^2} \right) \kappa_0 + \frac{n^2 \alpha^2}{\pi^2} \kappa_1 \right]$

Hinreichend genau ist (39)

$m^2 c_5 + n^2 \alpha^2 c_7 - n^2 \alpha^2 \pi^2 k \kappa_1$	$- m^3 c_3 - m n^2 \alpha^2 c_4$
$- m^3 c_3 - m n^2 \alpha^2 c_4$	$m^4 c_1 + n^4 \alpha^4 + m^2 n^2 \alpha^2 c_2 - \alpha^2 \pi^2 k \left[\left(m^2 n^2 \eta + \frac{m^2}{\pi^2} \right) \kappa_0 + \frac{n^2 \alpha^2}{\pi^2} \kappa_1 \right]$

Für reinen Schub und kombinierte Schub- und Druckbelastung ist die Beuldeterminante Tafel 1 angegeben. Hierzu gelten die Teilmatrizen AA, AC und CC (Tafel 2).

Wie bereits erläutert, kann mit hinreichender Genauigkeit auf BB, AB, CB verzichtet werden.

Schrifttum

[1] Pflüger, A.: Die orthotrope Platte mit Hohlsteifen. Österr. Ing. Arch. 9 (1955) S. 199—207.
[2] Pflüger, A.: Das Beulproblem der orthotropen Platte mit Hohlsteifen. Z. Flugwiss. 5 (1957) S. 178—181.
[3] Chwalla, E., Novak, A.: Theorie der einseitig angeordneten Stegblechsteife. Stahlbau 10 (1937) S. 73—76, S. 92—96.
[4] Girkmann, K.: Flächentragwerke. Springer-Verlag Wien 1956.
[5] Stern, J.: Kurventafeln zur Ermittlung der Beullasten orthotroper Platten mit Hohlsteifen. Mitteilungen des Instituts für Statik der T. H. Hannover, herausgegeben von A. Pflüger, Januar 1959.
[6] Bornscheuer, F. W.: Beitrag zur Berechnung ebener, gleichmäßig gedrückter Rechteckplatten, versteift durch eine Längssteife. Diss. Darmstadt 1946.

Bogenbrücke über den Glen Canyon

Von C. Christian Troebst, New York

DK 624.6 : 624.3

Kürzlich wurde in Amerika die höchste Stahl-Bogenbrücke der Welt dem Verkehr übergeben. In 204 m Höhe überspannt sie den Colorado Fluß in Arizona mit einer Stützweite von 308,4 m (Bild 1) (Pfeilhöhe 49,5 m). Sie ist damit gleichzeitig das zweitlängste Bauwerk dieser Art in den Vereinigten Staaten (Tafel 1).

Tafel 1. Vergleich der Glen Canyon Brücke mit anderen Stahl-Bogenbrücken:

	Stützweite m	Höhe über Wasser m	Baujahr
1: Kill van Kull (New York City)	495,6	87	1931
2: Sydney Hafenbrücke (Australien)	495	108	1930
3: Birchenough-Brücke (Süd-Rhodes.)	324	76,8	1935
4. Glen Canyon (Arizona)	308,4	210	1958

Die Brücke wurde im Rahmen des Colorado-River-Storage-Projekt errichtet, das den Bau von vier Staumauern, Kraftwerken und dazugehörigen Nebengebäuden vorsieht, wovon die Staumauer am Glen Canyon den größten Teilabschnitt darstellt.

Der Glen Canyon liegt inmitten des einsamen Colorado-Gebietes, das nur von einigen Indianern und wenigen Siedlern bewohnt wird. Er ist 422 km südlich von der nächsten, größeren Stadt Salt Lake City, und 217 km von der nächsten Eisenbahnstation Flagstaff entfernt.

Das größte Problem stellte daher für einen schnellen Beginn und eine reibungslose Durchführung der Bauarbeiten an der eigentlichen Staumauer der Transport von Maschinen und Baumaterial zu beiden Seiten der Canyonwände dar. Zunächst wurde eine 40 km lange Anschlußstraße bis zu dem nächsten US-Highway angelegt, auf der die ersten Maschinen herbeigeschafft wurden.

Auf der neuen Straße war jedoch nur die eine Seite der Baustelle zu erreichen. Die andere Seite, jenseits der über 300 m breiten Schlucht, konnte anfangs nur nach einem Umweg von 362 km mit Maschinen und Materialien für den Bau von zwei Seilzügen versorgt werden. Diesen Seilzügen folgte eine Laufbrücke für die Arbeiter. Dann konnte mit dem Bau der eigentlichen, 12 m breiten Glen Canyon Stahl-Bogenbrücke begonnen werden, die heute ein Teilstück des neuen Highway 89 bildet, und über die nun auch das Baumaterial für den Staudamm herbeigeschafft wird.

Die mit besonderen Schwierigkeiten verbundene Errichtung verlief ohne nennenswerten Zwischenfall. Bevor die 4000 t Stahl zur Baustelle geschafft worden waren, hatte man sie auf dem Werksgelände der Baufirma in Form von vier Halbbogen ausgelegt, die

meisten Nietlöcher gebohrt, montiert, und alle schwer zugänglichen Stellen mit einem mehrfachen Farbanstrich versehen. Die Toleranzen der genieteten Gurtungsteile beliefen sich dabei auf $\pm 0,0025$ mm. Alle Gurtungen bestehen — zum Teil aus Gründen der Gewichtsersparnis — aus niedrig legiertem Stahl.

Der erste, 500 m lange Seilzug an der Baustelle lief von einem 30 m hohen Turm auf der rechten (Ost)-Seite des Canyons zu einem 33 m hohen Turm auf der linken (West)-Seite (vgl. Bild 3). Das 50 mm dicke Seil hatte eine Tragfähigkeit von 12,5 t und verlief in zehn Meter Abstand von der zukünftigen Brückenachse. Damit war eine schnelle Verkehrsmöglichkeit über den Canyon geschaffen worden. Zudem konnte der Seilzug für die ersten Arbeiten an den Brückenfundamenten eingesetzt werden. Später diente er für den Transport von Baumaterial, während der zweite, stärkere Seilzug für die Beförderung der schweren Brückenteile verwandt wurde.

Dieser zweite Seilzug besaß eine Tragfähigkeit von 25 t und verlief — genau über der zukünftigen Brückenachse — von einem 49,5 m hohen Turm an der Westseite des Canyons zu einem 45 m hohen Turm an der Ostseite. Beide Türme dieses Seilzuges konnten jeweils 6,3 m nach beiden Seiten ausgewippt werden, so daß der Seilzug beide Bogenträger bedienen konnte.

Inzwischen waren in den fast senkrecht ansteigenden Canyonwänden, 210 m über dem Flußbett, von Seilmannschaften die Brückenfundamente geschüttet worden. Diese Betonblöcke, jeweils etwa 458,4 m³ groß, sind in den rosa Sandsteinwänden durch 31 mm-Ø-Dübel rund 9 m tief im Fels verankert. Auf ihnen sitzt der Stahlschuh mit einem Tragzapfen von 400 mm Durchmesser (Bild 2).

Eine Stützung der beiden Halbbogen während der Bauarbeiten durch ein Lehrgerüst kam wegen der außerordentlichen Tiefe der Schlucht nicht in Betracht. Man entschloß sich deshalb, die jeweils errichteten Bogenteile durch Rückhaltekabel zu halten. Diese insgesamt 72 Kabel liefen zu zwei Montageturmen, von denen einer 36 m, der andere 30 m hoch war. Ihre Höhe war erforderlich, um auch bei der Montage der ersten Felder eine Abspannung vornehmen zu können.

Die Kabel waren von der Bethlehem Pacific Coast Steel Corporation in vorgeschriebenen Längen angeliefert worden. Sie besaßen einen Durchmesser von 37,5 mm und eine Bruchfestigkeit von 138 t.

Die Montageturme selbst waren durch jeweils 16 ähnliche Kabel in 6,6 x 7,5 m großen, in massiven Sandstein eingelassene Stahlbetonblöcke verankert.

Mit Hilfe des 25 t-Seilzuges konnten die ersten Untergurtstäbe eines jeden Halbbogens auf die Tragzapfen der Widerlager gesetzt werden (Bild 2). Ihre freien Enden wurden durch je zwei Rück-

Um die Rückhaltekabel zu spannen, wurden hydraulische 100 t Pressen zwischen den einzelnen Laschenpaaren an den Anschlußstellen gesetzt (Bild 4). Nach dem Drücken wurden die Muttern



Bild 1. Die Glen Canyon-Brücke



Bild 2. Befestigung des ersten Untergurtstabes am Widerlager

haltekabel gehalten, die zu den Montageturmen liefen. Anschließend wurde der Obergurt und die Diagonalen montiert.

Nachdem auf diese Weise der Bau (an Ost- und Westseite) bis zum zweiten Feld fortgeschritten war, wurden an diesen Punkten vier Rückhaltekabel an dem Untergurt angebracht. Die beiden ersten Paare der Rückhaltekabel am Ende des ersten Untergurtes konnten entfernt werden.

Dann schritt die Errichtung des Bogens um zwei weitere Felder fort. Darauf wurden vier Rückhaltekabel am Ende des dritten, oberen Gurtstabes angebracht. Nach diesem Prinzip verfuhr man während der gesamten Konstruktion. Sechs Rückhaltekabel wurden am Obergurt des fünften Feldes befestigt, zehn Rückhaltekabel schließlich am Obergurt des neunten Feldes (Bild 3).

Sobald die Rückhaltekabel eines neuen Feldes befestigt und gespannt waren, konnten die Kabel des vorhergehenden Feldes entfernt werden.

Die Kabel wurden über eine Krafteinleitungsvorrichtung (Stangen \varnothing 62,5 mm) an den Gurtstäben befestigt.



Bild 3. Montage der Bogenfelder

achgezogen und die Laschen gespannt. Auf diese Weise konnten alle Kabel gleichmäßig gespannt und jedes Feld wunschgemäß ausgerichtet werden.

Die letzten acht Rückhalteketten wurden an dem Obergurt des 15. Feldes (die Mitte bildete das 21. Feld) befestigt. Sie brauchten jedoch nicht mehr das Gesamtgewicht des teilweise bereits vollendeten Brückenbogens zu tragen. Denn in diesem Fall hatte man die Kabel des neunten Feldes an Ort und Stelle belassen. Die Rückhalteketten des 9. und 15. Feldes dienten gleichzeitig dazu, um letzte Korrekturen beim Einbau des letzten, mittleren Obergurtstabes zu ermöglichen (Feld 21).

Im Augenblick des Schließens wurden beide Bogenhälften von je 36 Rückhalteketten getragen. Zehn davon waren an jeden Obergurt eines jeden neunten Feldes und acht an jeden Obergurt eines jeden 15. Feldes befestigt.

Mit Hilfe der Pressen wurden beide Bogenhälften ausgerichtet. Nachdem der Obergurt mit einem Bolzen von 50 mm ϕ geschlossen war, konnten daraufhin die letzten Rückhalteketten entfernt werden.

Die Brücke wirkte in diesem Stadium als Dreigelenkbogen. Die Schließung des Untergurtes erfolgte mit Hilfe von 500 t-Pressen. Nachdem die letzten Löcher in den Paßstücken des Untergurtes gebohrt und vernietet waren, war damit die Glenn Canyon-Brücke zu einer Zweigelenkbrücke geworden. Der Durchmesser der verwendeten Nieten betrug 23 bis 29 mm.

Die 12 m breite Fahrbahn, mit zwei je 1,2 m breiten Gehwegen, wurde mit Hilfe der Seilzüge gelegt, und darauf der Beton geschüttet. Diese Arbeiten konnten während des vergangenen Winters



Bild 4. Vorrichtung zum Befestigen und Spannen der Halteseile

stattfinden, der ja in Arizona ungewöhnlich milde ist. Die neue Brücke soll Windgeschwindigkeiten bis zu 250 km/Std. aushalten können.

Brückenentwurf: Bureau of Reclamation, Denver, Colorado.

Bauausführung: Kiewit-Judson/Pacific Murphy Corp.

Oktaplatte in Rohrkonstruktion

Von Dipl.-Ing. J. Fröhlich, Düsseldorf

DK 624.014.27

Zur Überdachung von repräsentativen Räumen wurde in den letzten Jahren eine Rohrkonstruktion entwickelt, die wegen ihrer ansprechenden architektonischen Wirkung stets von unten sichtbar bleibt. Es handelt sich bei dieser sogenannten Oktaplatte um ein Flechtwerk, das aus dem Zusammenfügen von Tetraedern und Okta-

Oktaplatten lassen sich nur als parallele Platten herstellen, und zwar in ebener oder zylindrisch gekrümmter Ausführung. Außerdem können natürlich Firste aus dem Zusammenfügen zweier ebener Platten gebildet werden. Bei einer ebenen Platte sind alle Stäbe der Konstruktion gleich lang. Die Stäbe werden in den Knotenpunkten miteinander verschweißt und das wesentliche technische Problem besteht darin, für diese Knotenpunkte, die untereinander alle gleich sind, eine einfache Lösung zu finden. Wie aus den Abbildungen hervorgeht, werden in jedem Knotenpunkt 6 Stäbe der oberen oder unteren Ebene miteinander verschweißt und weiterhin 3 räumlich abgehende Diagonalen (s. Bild 1). Die erwünschte filigranartige Wirkung dieser Oktaplatten wird am besten durch Anwendung von

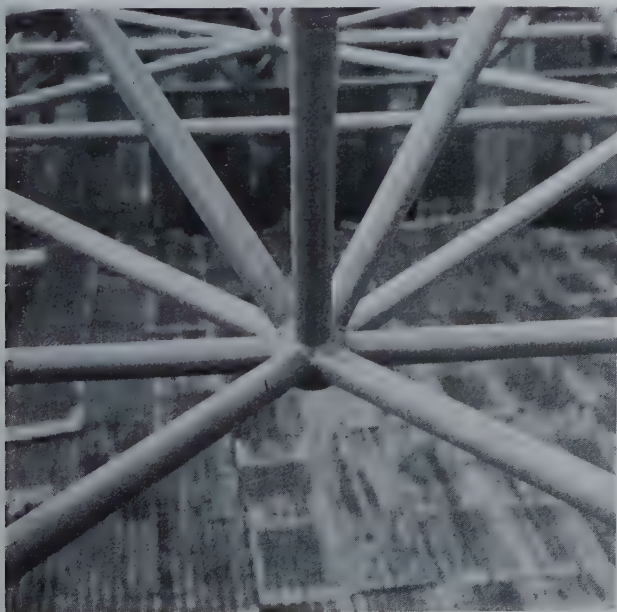


Bild 1. Knotenpunkt in der unteren Ebene einer Oktaplatte, gebildet aus einer Kugel mit 9 einlaufenden Streben. Alle Strebenwinkel betragen 60° zueinander

edern entsteht. Dieser Aufbau ist der Natur entlehnt und stellt das Raumgitter der Kohlenstoffverbindungen dar. Die Anregung, dieses Flechtwerk für Dachkonstruktionen zu verwenden, stammt von Herrn Werner Königs, Krefeld. Die Mannesmann Aktiengesellschaft, Düsseldorf, hat diesen Vorschlag aufgegriffen, die Konstruktion durchentwickelt und inzwischen in einer Reihe von Ausführungen geliefert.

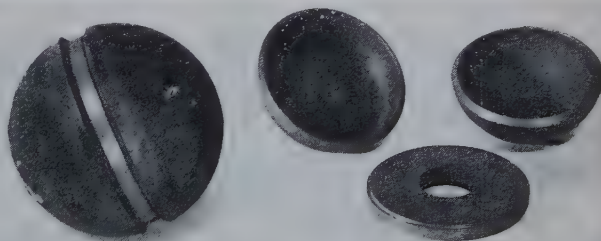


Bild 2. Hohlkugel, bestehend aus 2 gepreßten Halbschalen und eingelegter Zwischenscheibe mit Einzelteilen, fertig zum Verschweißen

Stahlrohren erzielt, da bekanntlich das Rohr wegen des weichen Übergangs vom Licht zum Schatten stets dünner wirkt, als es ist. Um einen einfachen Zuschnitt der Rohre und auch einfachste Schweißungen beim Bau und bei der Montage zu erzielen, sind alle Knotenpunkte dieser Konstruktion durch Hohlkugeln gebildet, an die die oben erwähnten insgesamt 9 Streben angeschweißt sind.

Der Zuschnitt der Rohre erfolgt durch einen rechtwinkligen Sägeschnitt, wodurch sich beim Zusammenbau automatisch die Rohrachse auf die Kugelmitte zentriert.

Die Kugel selbst besteht aus 2 gepreßten Halbschalen mit eingelegter Blechscheibe und wird vor dem Zusammenbau der Platte fertig geschweißt (s. Bild 2). Die Beanspruchung der Kugeln erfolgt durch die in der oberen oder unteren Ebene angeschweißten 6 Stäbe



Bild 3. Oktaplatte einer Fabrikationshalle von 35×35 m während der Montage. Höhe der Plattenkonstruktion 1,75 m (Architekt Damm, Düsseldorf)

in diesen 6 Richtungen auf Zug oder Druck. Um die Tragfähigkeit dieser Verbindung, namentlich bei Zugbeanspruchung zu prüfen, wurden in dem Ingenieur-Laboratorium der Technischen Hochschule Darmstadt unter Leitung von Herrn Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E. h. Klöppel umfangreiche Versuche durchgeführt. Bei der für die Versuche geschaffenen Einrichtung ließen sich gleichmäßige Stabkräfte in alle 6 Zugstäbe einleiten. Das Verhalten der Kugel und auch der Schweißanschlüsse der Rohre sowie die Ermittlung der erforderlichen Kugelwanddicke in Abhängigkeit von der Rohrwanddicke waren die wesentlichen Aufgaben dieser Untersuchungen. Für eine wirtschaftliche Anwendung dieser Konstruktion war es entscheidend, daß der Schweißanschluß vom Rohr zur Kugel bei der Zugverbindung mit 0,9 entsprechend DIN 4115,



Bild 5. Zylindrisch gekrümmte Oktaplatte auf unregelmäßigem Grundriß für eine Kirche in Düsseldorf

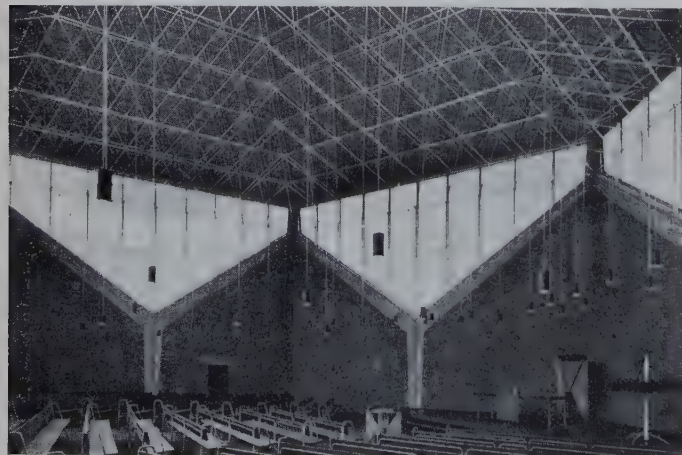


Bild 4. Zeltdachkonstruktion auf regelmäßigem Sechseck-Grundriß für eine Kirche in Düsseldorf

Absatz 4.53 nachgewiesen und gerechnet werden kann.

Der statische Aufbau der Oktaplatte stellt ein hochgradig statisch unbestimmtes System dar. Die Bemessung erfolgt je nach der Form des Tragwerks entweder als Trägerrost oder als Platte. Die Montage dieser Rohrkonstruktion geht im allgemeinen so vor sich, daß trans-



Bild 6. Eindeckung einer Oktaplatte durch rhombenförmige Spannbetonplatten

portfähige Träger, die aus einem Streifen dieses Flechtwerkes gebildet sind, zur Baustelle transportiert werden. Nach dem Aufsetzen dieser Streifen auf die Unterkonstruktion erfolgt das Einschweißen der jeweils dazwischenliegenden Stäbe auf der Baustelle (s. Bild 3).

Hierbei ist keinerlei Unterkonstruktion erforderlich. Es sind in der Zwischenzeit Oktaplatte in gewölbter Form bis zu 70 m Spannweite

durchgearbeitet worden, die vollständig auf der Baustelle im freien Vorbau geschweißt werden.

Die Dicke der Oktaplatte wird im allgemeinen mit $\frac{1}{16}$ bis $\frac{1}{20}$ d. max. Spannweite angenommen. Sie ist damit erheblich niedriger als bei Dachkonstruktionen in üblicher Stahlbauweise. Der ideale Grundriß für eine Oktaplatte ist das regelmäßige Sechseck, wie es z. B. bei einer Kirche in Leverkusen (der Architekten Dr. Hentrich und Pechnigg, Düsseldorf) als Zeltdach angewandt wurde (Bild 4).

Es lassen sich jedoch auch andere und auch unregelmäßige Grundrisse überdecken, wie z. B. auf dem Bild 5 für eine Kirche in Düsseldorf dargestellt (Architekt Lehm Brock, Düsseldorf).

Die Eindeckung der Oktaplatte erfolgt mit Rücksicht auf die architektonische Wirkung zweckmäßig durch eine über der Konstruktion liegende und in der Untersicht glatte Dachhaut. Es wurde bisher bei der Forderung einer guten Wärmedämmung doppelte Holzschalung verwendet und im anderen Falle auch Spannbetonplatten. Die Auflagerung der Dachhaut erfolgt immer in den Knotenpunkten der obersten Wand. Es werden auf die Kugel Rohrstützen aufgeschweißt mit geeigneten Beschlägen oder Flanschplatten (s. Bild 6).

Die Anwendung der Oktaplatte erfolgt wegen ihrer geringen Bauhöhe und wegen ihrer interessanten architektonischen Wirkung. Für den Architekten besteht ein weiterer Spielraum zum Einbau von Dreiecksflächen, dreiseitigen Pyramiden oder anderen Körpern aus schall schluckendem und auch farbigem Material, um Forderungen und Wünsche in dieser Hinsicht zu befriedigen.

Die Fairchild-Aluminium-Brücke¹⁾

Berichtet von Dipl.-Ing. D. Feder, Bethlehem, USA

DK 624.21.014.71

Konstruktion

Die Fairchild-Aluminiumbrücke ist eine dünnwandige, ausgeglichene, vollintegrierte Zellenkonstruktion. Der Querschnitt der als Versuchsobjekt hergestellten Brücke hat fünf ineinandergreifende Dreiecke, so daß sich kontinuierliche Ober- und Unterflächen ergeben (Bild 1). Dieser Konstruktionsart wird von den Herstellern besonders hohe Torsionssteifigkeit zugeschrieben, was zur Folge habe, daß jeder Teil der Brücke unabhängig vom Lastangriffspunkt gleichmäßig zum Tragen herangezogen werde. Sämtliche Konstruktionsteile bestehen aus einer Aluminiumlegierung (Amerikanische Klassifizierung 6061-T6), deren Fließgrenze annähernd gleich der von St 37 ist, während das spezifische Gewicht nur ein Drittel dessen von Stahl beträgt. Diese Aluminiumlegierung soll sich zudem durch sehr hohe Korrosionsfestigkeit und sehr gute Formbarkeit beim Strangpressen auszeichnen.

Die Länge der Versuchsbrücke zwischen den Auflagern beträgt 15,24 m (50 ft), die Gesamtbreite 7,32 m (24 ft). Das Gesamtgewicht setzt sich zusammen aus 5153 kg Aluminium, 3039 kg Bewehrungsstahl und dem Gewicht der Betonfahrbahndecke mit 317 kg/m². Die wichtigsten Einzelheiten der Konstruktion gehen aus Bild 2 hervor; erläutern sei hier nur folgendes gesagt: Das Bodenblech und die Stegbleche sind durch Winkelprofile versteift, die in Abständen von 1,52 m zu Schotten zusammengefaßt sind, welche der Aussteifung des Gesamtquerschnittes dienen. Die Zahl der Steifen pro Abschnitt wächst zu den Enden hin, damit die höheren Schubkräfte aufgenommen werden können. Der Obergurt ist durch ein Wellblech mit querlaufenden Trapezrippen verstärkt. Die Bleche sind an mehreren Stellen gestoßen; jedoch laufen die Knotenprofile der Eckpunkte über die ganze Brückenlänge durch. Zur Sicherung zwischen Beton und Obergurt sind auf den Längsrippen U-förmige Dübel angebracht (in Bild 1 deutlich erkennbar).

In diesem Zusammenhang erhebt sich die Frage nach der Verträglichkeit von Beton und Aluminium, und zwar hauptsächlich unter den zwei Gesichtspunkten:

- a) wie verhält sich die Aluminiumlegierung beim Kontakt mit dem feuchten Frischbeton,
- b) welche Auswirkungen hat der große Unterschied zwischen den Wärmeausdehnungszahlen von Beton und Aluminium?

Das Betongemisch enthält alkalische Lösungen, die die schützende Oxidschicht angreifen, die dem Aluminium seine hervorragende Korrosionsfestigkeit gibt. Die Laugen bilden jedoch zusammen mit dem Aluminium einen andersartigen schützenden Film, der gegen weitere chemische Angriffe abschirmt. Im Auftrag der Aluminiumindustrie durchgeführte Versuche, in denen das Verhältnis von Aluminium zu Betondicke, die Feuchthaltung und die galvanischen Einflüsse

variiert wurden, haben ergeben, daß die Angriffstiefe während der Abbindezeit des Betons weniger als 0,025 mm (10^{-3} in.), nach 27 Jahren weniger als 0,127 mm ($5 \cdot 10^{-3}$ in.) betrug. Die Auswirkung galvanischer Elemente im Beton zwischen Aluminium und Bewehrungsstahl beschränkt sich auf geringfügige Korrosion, die unabhängig ist von Durchmesser und Dichte der Bewehrung.

Den Unterschieden in der Wärmeausdehnung von Aluminium und Beton wurde durch Anbringen von „Wärmebalken“ (siehe Bild 2) Rechnung getragen, die im Gebiet der Endschotte über die gesamte Breite des Bauwerkes durchlaufen. Diese Balken leisten der ungleichen Wärmeausdehnung Widerstand, wodurch eine zusätzliche

Längskraft und ein zusätzliches Moment in der Aluminiumkonstruktion hervorgerufen werden.

2. Berechnung

Die Aluminiumbrücke wurde nach Prinzipien des Flugzeugbaus entworfen und berechnet, deren Anwendung auf den Straßenbrückenbau in den USA völlig neu ist. Dabei wird die Schale mit den Aussteifungen als eine zusammenwirkende Einheit aufgefaßt und dieser ideale Querschnitt nach der Theorie des dünnwandigen geschlossenen Querschnitts behandelt. Diese Theorie führt auf die folgende Beziehung für ein einzelliges Profil

$$D = 2 F_u \cdot T, \\ \theta = \frac{D}{G} \cdot \frac{1}{4 F_u^2} \oint \frac{ds}{t} \\ (\text{Bredt'sche Formel})$$

für konstante Wanddicke

$$\theta = \frac{D \cdot U}{G \cdot 4 F_u^2 \cdot t}$$

In diesen Gleichungen bedeuten:

- F_u = Fläche des Zellenquerschnittes,
- G = Schubmodul,
- U = Umfang des Zellenquerschnittes,
- T = Schubfluß,
- t = Wanddicke,
- D = Torsionsmoment,
- θ = Drillung.

Nach Bestimmung des Schubflusses und der Verdrehung für den einzelligen Querschnitt können dieselben Gleichungen auch auf eine mehrzellige Konstruktion angewendet werden. Für zwei benachbarte Zellen kann das Torsionsmoment um einen angenommenen Punkt 0 als $D = T_1 \cdot 2 F_{u1} + T_2 \cdot 2 F_{u2}$ geschrieben werden. Die Verdrehungsgleichung kann dann auf jede Zelle, wie gezeigt, angewendet werden. Zur Erhaltung der Kontinuität muß die Verdrehung der beiden Zellen gleich sein; diese Bedingung liefert die notwendigen Gleichungen zur Lösung dieser statisch unbestimmten Aufgabe.

Die Brücke ist in Längsrichtung als Verbundkonstruktion berechnet, d. h. die bewehrte Betonfahrbahndecke ist als Druckglied in die Berechnung einbezogen. Die Dübel zur Schubverankerung wurden auf Grund der an der Universität von Illinois durchgeführten Versuche bemessen [1], [2]. Der Sicherheitsfaktor für Schub wurde mit

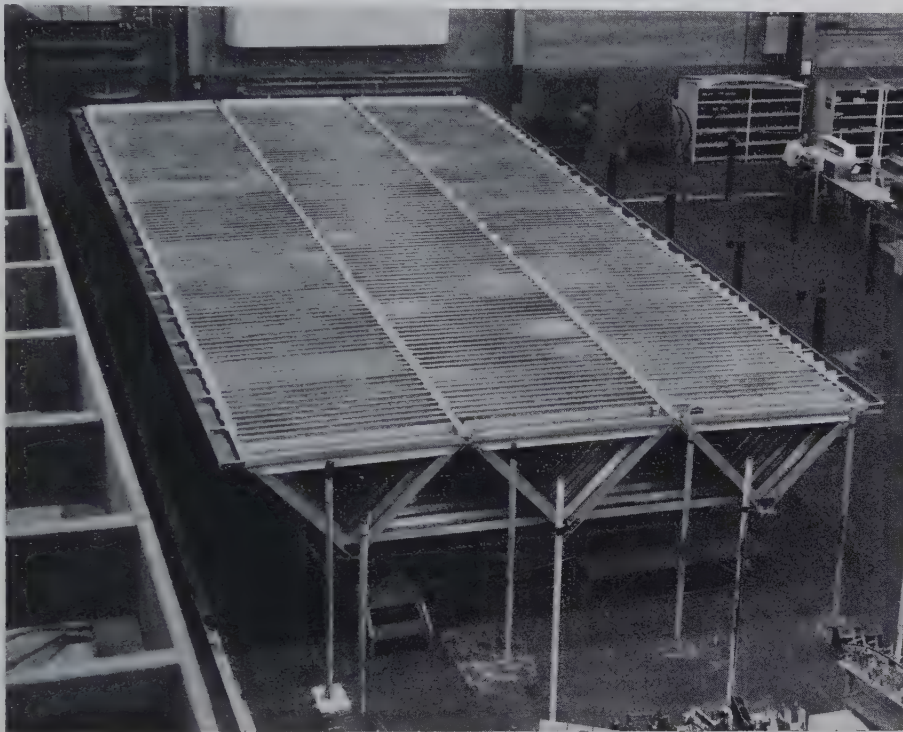


Bild 1. Fairchild-Versuchsbrücke in der Werkstatt

¹⁾ Dieser Bericht stützt sich auf einen auf der 44sten Jahresversammlung des Amerikanischen Verbandes der Straßenbauingenieure (American Association of State Highway Officials) in San Francisco im Dezember 1958 gehaltenen Vortrag, dessen Abdruck dem Verfasser freundlicherweise von der American Aluminum Structures Inc. zur Verfügung gestellt wurde. Der Originaltitel des Vortrages lautet: „The Fairchild Aluminum Bridge, Design Data, Test Results, and Comparative Pricing“ von Harry J. Kahn und Alfred A. Gassner. Außerdem wurden an der Lehigh Universität gewonnene Versuchsergebnisse bei der Ausarbeitung herangezogen.

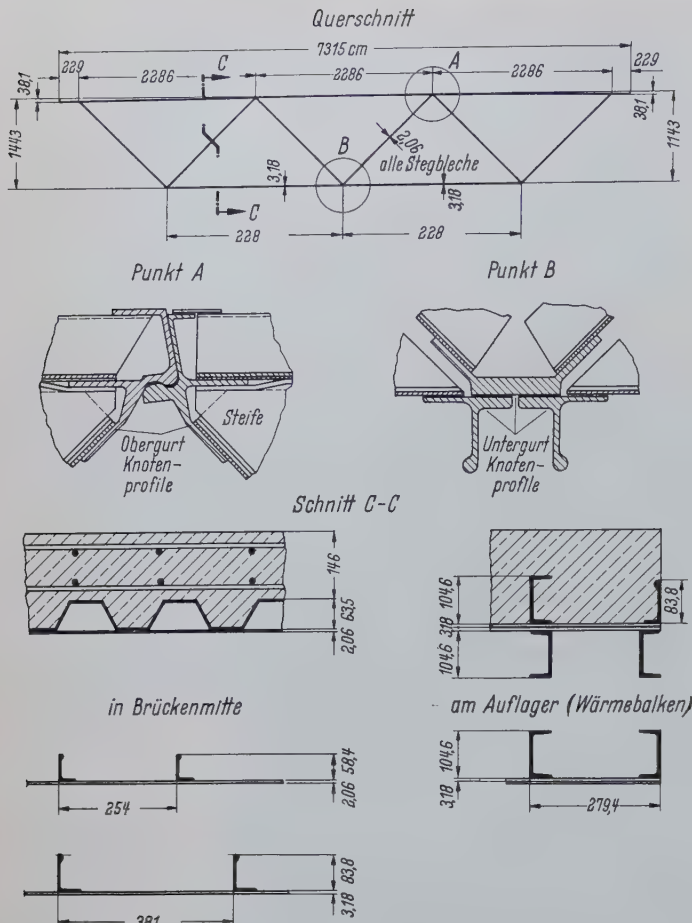


Bild 2. Einzelheiten der Konstruktion

5,5 angesetzt. Die bei der Berechnung zugrunde gelegte Belastung ist H20-S16-44, die schwerste, die in den amerikanischen Straßenbrückenvorschriften [3] enthalten ist. Die Achslasten dafür betragen 14,5 t.

3. Wirtschaftlichkeit

Von den Herstellern der Fairchild-Aluminiumbrücke wird eine Reihe von Vorteilen dieser Bauweise hervorgehoben, die ihre Verwendung trotz der höheren Materialkosten sehr wirtschaftlich machen soll. Diese Vorzüge folgen einerseits aus dem Gebrauch von Aluminium, andererseits aus der spezifischen Konstruktionsart.

Da das Eigengewicht bei Brücken einen wesentlichen Teil der Belastung ausmacht, ergibt sich beim Bauen mit einem leichteren Material eine Materialersparnis, die schon teilweise den höheren Ausgangspreis kompensiert. Ferner verbessert die Gewichtsverringerung die Transportfähigkeit von der Fabrik zur Baustelle und erlaubt eine schnellere und mit leichteren Geräten durchführbare Montage. Bei schwierigen Bodenverhältnissen sind weitere Kosteneinsparungen möglich, da die Gründungen leichter gehalten werden können. Die Korrosionsfestigkeit ist ein weiterer positiver Faktor des Aluminiums; es braucht keinen Anstrich, und die Unterhaltungskosten werden dadurch wesentlich herabgesetzt. Die Bilder 3 und 4 zeigen Vergleichskurven für die Anfangs- und Gesamtkosten verschiedener Brückenarten.

Die Brückenkonstruktion in Zellenbauweise ist nach den Angaben der Hersteller sehr anpassungsfähig; sie kann ohne wesentliche Änderungen für kurvenförmige, geneigte und schiefe Brücken verwendet werden. Sie ist daher ideal für die Massenproduktion geeignet. Man plant, auf Lager zu arbeiten, so daß bestimmte Standardlängen auf Abruf zur Verfügung stehen. All dies könnte der Aluminiumbrücke große Wirtschaftlichkeit geben, und die Hersteller erhoffen sich daher eine ausgedehnte Verwendung dieses Brückentyps in dem großzügigen Straßenbauprogramm der USA.

4. Versuchsprogramm

Das Versuchsprogramm umfaßte eine Reihe von statischen und Dauerfestigkeitsversuchen unter zwei verschiedenen Belastungsanordnungen. Die Gesamtansicht der Versuchseinrichtung ist in Bild 5 wiedergegeben, die zwei verschiedenen Belastungsanord-

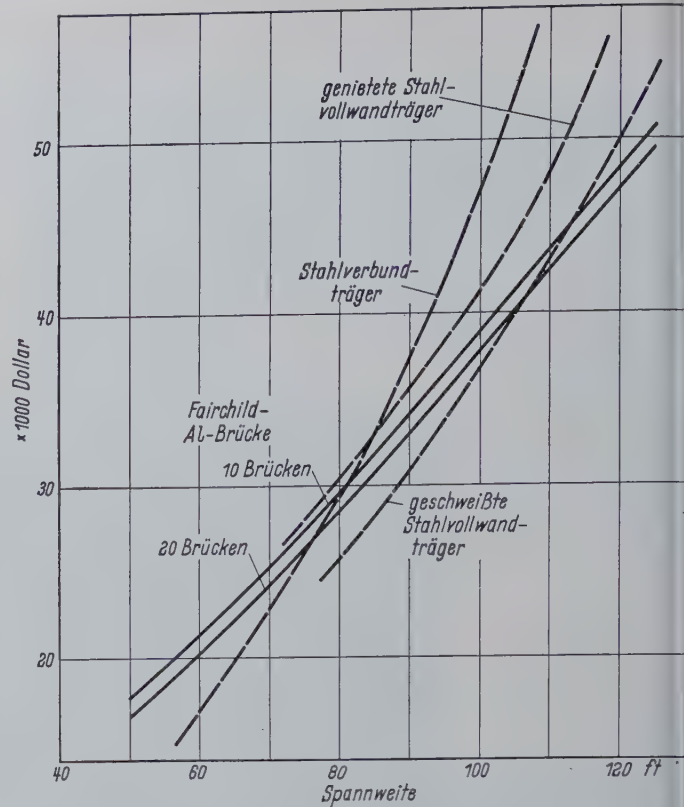


Bild 3. Anfangskosten für Fairchild-Aluminiumbrücken und für Stahlbrücken; Straßenbreite 20 ft. Belastungsklasse H 20-S 16-44

nungen (zentrisch und exzentrisch) sind in Bild 6 skizziert. Als Vergleichsgrundlage zwischen der entsprechend den Vorschriften angenommenen Verkehrslast und der Versuchsbelastung diente das rechnerische Moment in Spannweitenmitte. Die statischen umschwingenden Lasten wurden mit Hilfe von hydraulischen Amsle Pulsatoren aufgebracht.

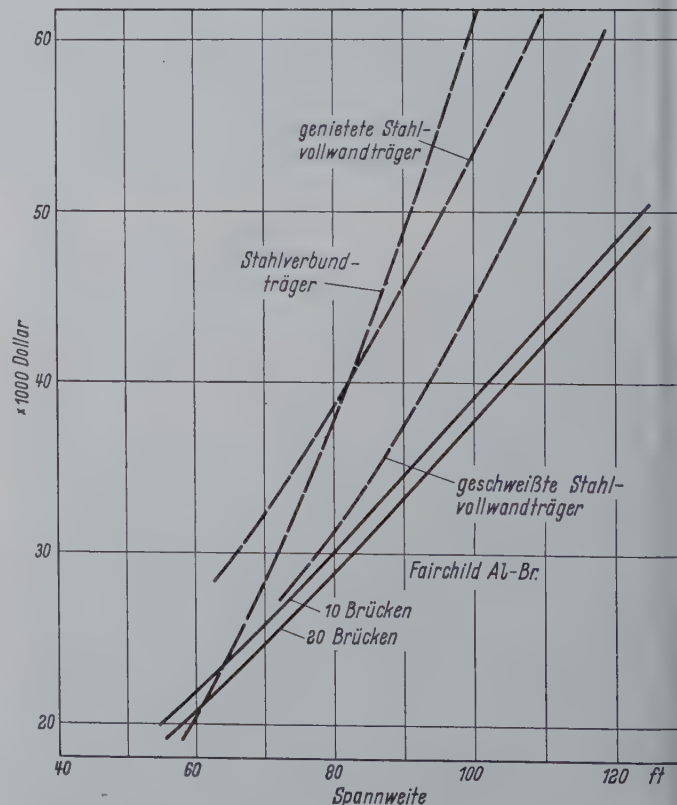


Bild 4. Vergleich der Kosten für Fairchild-Aluminiumbrücken und für Stahlbrücken mit 10maliger Reinigung und Neuanstrich

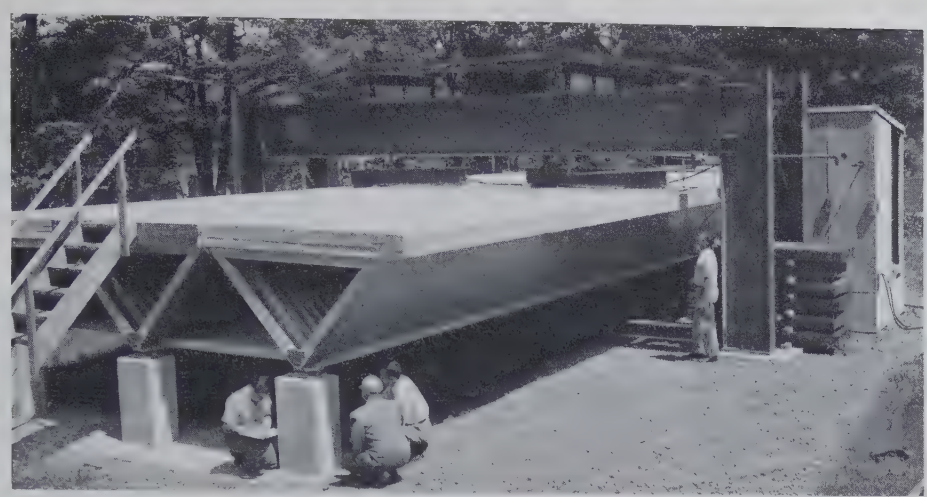


Bild 5. Versuchsbrücke auf dem Prüfstand

Im einzelnen gliederte sich das Versuchsprogramm wie folgt:
1. statische Belastung bis zu 1,5facher Gebrauchslast.
2. schwelende dynamische Belastung.

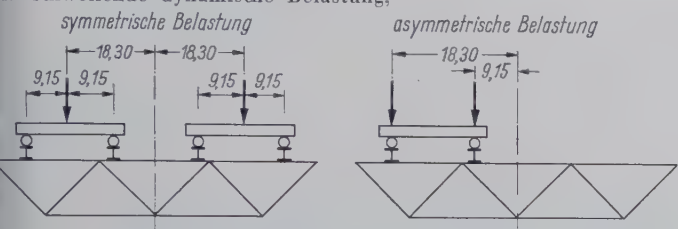


Bild 6. Belastungsanordnung im Versuch

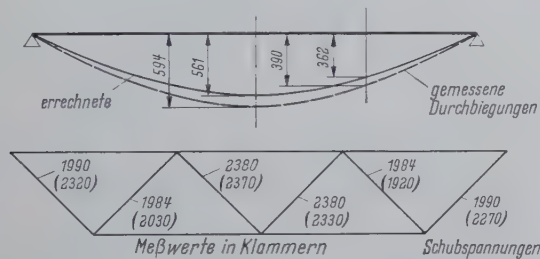


Bild 7. Vergleich der Rechenwerte mit den Meßergebnissen

- a) 0,25 Mill. Lastspiele mit Gebrauchslast,
 - b) 0,25 Mill. Lastspiele mit 1,25facher Gebrauchslast,
 - c) 0,60 Mill. Lastspiele mit 1,5facher Gebrauchslast,
 - d) 0,20 Mill. Lastspiele mit exzentrischer 1,25facher Gebrauchslast,
- 3. statische Belastung bis zur zweifachen Gebrauchslast,
 - 4. statische Belastung mit Amslerpressen und zusätzlichem Ballast bis zur Traglast.

Die Versuchsergebnisse werden als sehr zufriedenstellend bezeichnet, insbesondere wird die gute Übereinstimmung zwischen berechneten und gemessenen Werten hervorgehoben (Bild 7). Die Bruchlast der Brücke erreichte das Neunfache der Gebrauchslast. Bei der Beurteilung dieses Sicherheitsfaktors ist jedoch zu berücksichtigen, daß die Brücke für die von den Aluminiumverarbeitern festgesetzten Minimalspannungen berechnet wurde. Die tatsächliche Festigkeit des verwendeten Materials ist höher, so daß der Sicherheitsfaktor eher in der Nähe von sechs liegen dürfte. Der Bruch wurde eingeleitet durch das unelastische Beulen eines Außenstegbleches unter Schub in Auflagernähe.

Schrifttum

- [1] Viest, I. M. und Siess, C. P.: Design of Channel Shear Connectors for Composite I-Beam Bridge, Public Roads, Vol. 28, No. 1, April 1954.
- [2] Viest, I. M., Siess, C. P., Appleton, J. H., Newmark, N. M.: Full-Scale Tests of Channel Shear Connectors and Composite T-Beams, University of Illinois Bulletin No. 405, 1952.
- [3] Standard Specifications for Highway Bridges, American Association of State Highway Officials (AASHTO).

Verschiedenes

Pavillon Marie Thumas auf der Weltausstellung 1958 in Brüssel¹⁾

Von der belgischen Gesellschaft „La Commerciale des Conserve“ wurde auf der Brüsseler Weltausstellung 1958 ein Pavillon errichtet, der durch seine eigenwillige Form auffiel. Der Raum diente zu Ausstellungszwecken und als Gaststätte.

Der Pavillon (Bild 1) hatte einen Grundriß von 53 × 36,8 m. Das Dach setzte sich aus vier aneinander anschließenden Konoiden zusammen, die an ihren Rändern von vorgespannten Seilen als tragende Elemente gehalten wurden. Zwischen den Tragseilen lagen die gelenkig angeschlossenen halbstarren Parabel-Binder (Bild 2), die so ausgebildet waren, daß die Gurte nur Zug aufnehmen konnten. Ihre Untergurte waren durch querlaufende Seile abgespannt (Bild 2). Auch die Giebfassaden bestanden aus Konoiden. Die Längsfassaden wurden aus aufeinanderfolgenden hyperbolischen Paraboloiden gebildet; die Binder folgten wie bei den Konoiden den Erzeugenden und stützten sich unten auf die Gründungen, oben gegen die Eckträger (z. B. CrBr in Bild 3) ab, die den Rand der Dachkonoiden bildeten.

Die Vorspannkräfte und die Dachlasten wurden durch V-förmig gespreizte, gelenkig gelagerte Stützen (z. B. BrXDr) von 22 und 28 m Länge in die Fundamente abgetragen.

Die Längsstabilität des Gebäudes wurde durch diese spindelförmigen Stützen im Zusammenwirken mit vertikalen und horizontalen Abspannseilen in den Ecken der Konstruktion verbürgt. Die Querstabilität war durch die Tragseile ebenfalls in Verbindung mit den Stützen und vertikalen Abspannseilen gegeben.

Nachdem die Konstruktion montiert war, erfolgte der Vorspannvorgang so, daß zunächst jedem Binder des Daches oder der Giebel-



Bild 1. Ansicht des Pavillons

¹⁾ Nach Sarger, R.: Der Pavillon Marie Thumas auf der Weltausstellung Brüssel 1958. Acier Stahl Steel 24 1959) H. 4 S. 153.

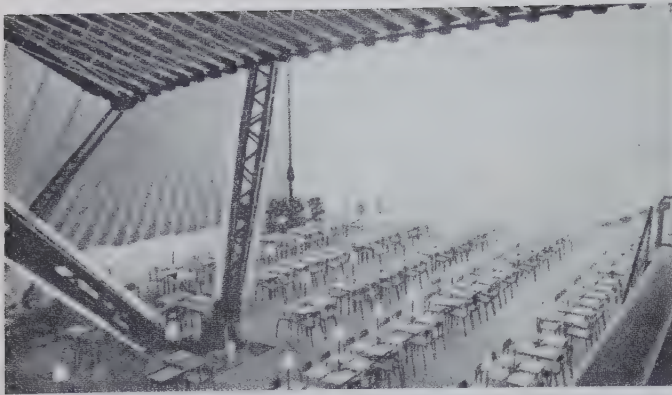


Bild 2.

Blick in den Innenraum mit den frei sichtbaren Konstruktionselementen

fassaden nach dem Ausrichten durch die an den Enden dieser Konstruktionselemente vorgesehenen Schraubengewinde eine Anfangsspannung erteilt wurde. Sodann zog man die Seile C und E (Bild 3) mit Hilfe von Seilspannvorrichtungen oder Flaschenzügen provisorisch an. Die endgültige Vorspannung wurde durch Anziehen der Spannvorrichtung in den vertikalen Abspannseilen (z. B. ArBr) eingebracht, wodurch die Köpfe der Stützen sich um das vorgeschriebene Maß nach außen verschoben. Alle Seile eines Spannungsbereiches des Daches erhielten somit in einem Arbeitsgang die gewünschte Vorspannung.

Der Seildurchmesser bei den Haupttragseilen und den Abspannseilen schwankte zwischen 55 und 78,5 mm. Bemessen wurden sie

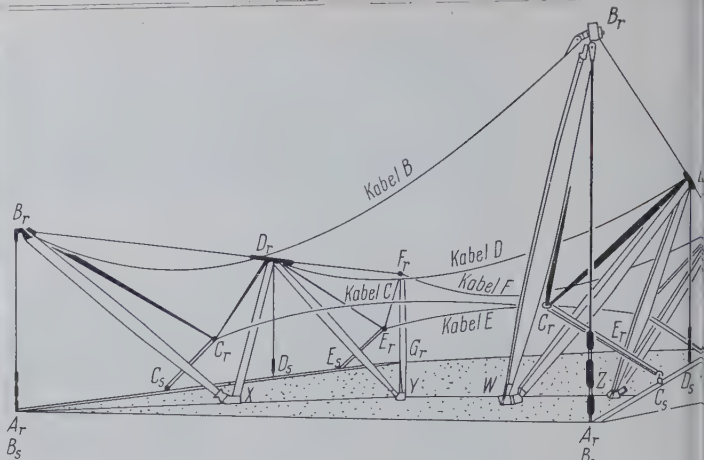


Bild 3. Perspektivische Darstellung des Tragsystems

mit einem Sicherheitsfaktor von 2,5 gegen Bruch. Als Außenhaut verwendete man 0,4 mm dicke Plastikfolien, die auf der Baustelle gespannt und geschweißt wurden. Die Dachteile wurden mit Aluminiumfarben und die Längsfassaden mit verschiedenen blauen Farbtönen pigmentiert. Die Giebelfassaden waren aus lichtdurchlässigem Kunststoff hergestellt.

Aus der folgerichtigen Anwendung des Vorspanngedankens wurde hier ein Bauwerk geschaffen, das auch den Anforderungen moderner Formgebung gerecht wird. Der Konstrukteur findet hier wiederum die Bestätigung, daß sich Großräume am wirtschaftlichsten mit Seilen überbrücken lassen.

G. Lacher

Persönliches

Dr.-Ing. Hans Konrad Havemann 60 Jahre

Am 4. August 1959 ist Baudirektor Dr.-Ing. Hans Konrad Havemann 60 Jahre alt geworden. Seit Januar 1951 leitet er die Hauptabteilung Brücken- und Ingenieurbau des Tiefbauamtes der Baubehörde Hamburg und seit Anfang 1958 zusätzlich das bautechnische Dezernat für den U-Bahn-Neubau.

Havemanns Eltern und Vorfahren, aus Dithmarschen stammend, gehören zu den alten Hamburger Familien und sind weitestgehend im Baufach tätig gewesen. So wurde dem angehenden Ingenieur, der 1917 sein Abitur machte und dann am ersten Weltkrieg als Artillerist teilnahm, die Liebe zum Beruf mit auf den Weg gegeben. Einer 1919 abgeleisteten praktischen Tätigkeit folgte zunächst ein kurzes Studium der Naturwissenschaften an der Universität Hamburg. 1920 siedelte Havemann zur TH Darmstadt über, wo er Bauingenieurwesen studierte und im Februar 1925 die Diplomprüfung ablegte. Als Assistent von Professor Dr.-Ing. Kammer am Lehrstuhl für Statik, Brückenbau und Industriebau der TH Darmstadt promovierte Havemann im Dezember 1927 mit einem Thema aus dem Stahlbrückenbau zum Dr.-Ing.



Am 12. April 1928 begann Havemann seine Tätigkeit bei der Baubehörde Hamburg in der Sektion Ingenieurwesen, dem heutigen Tiefbauamt. Hierbei handelte es sich zunächst um eine mehrjährige Mitwirkung bei der Aufschließung der östlichen Stadtgebiete mit der Durchführung zahlreicher Brückenbauten. 1938 wurde Havemann unter gleichzeitiger Übernahme in das Beamtenverhältnis zum Baurat ernannt.

In den ersten Jahren nach Kriegsende wurde Havemann die Erledigung nennenswerter Wiederaufbauarbeiten in Hamburg übertragen. Hierzu gehörte auch die Instandsetzung zahlreicher zerstörter Brücken. Die Zeit nach der Währungsreform bis heute sah Havemann entsprechend der Verkehrs- und Wirtschaftsentwicklung auf verantwortlichem Posten bei der Durchführung eines umfang-

reichen Bauprogrammes mit bemerkenswerten Ingenieuraufgaben seit Januar 1951 als Leiter der eingangs erwähnten Hauptabteilung Brücken- und Ingenieurbau.

Von den bemerkenswerten Ingenieurbauten der letzten Jahre, die unter der Leitung von Havemann ausgeführt wurden oder deren Vollendung entgegengehen, sind zu nennen:

Moderne Brücken aus Anlaß der Verbreiterung und Anlage neuzeitlicher Verkehrsadern: Lombardsbrücke, Brücke im Zuge der Ost-West-Achse (z. B. Alsterfleetbrücke) und mehrere Brücken im Zuge der Nord-Süd-Achse (Verbreiterung der Norderelbbrücke und der Billhorner Brücke) als wichtigste und größte Brückenbaumaßnahme.

Neuzeitliche Hallenbauten im Zusammenhang mit dem Bau der Luftwerft für die Deutsche Lufthansa auf dem Flughafengelände in Hamburg-Fuhlsbüttel. Hier sind vor allem die beiden Flugzeughallen von je 13 000 m² Grundfläche zu erwähnen. Weitere Hallenbauten für den Ausbau der Hamburger Versorgung: eine Verkaufshalle von 40 000 m² Grundfläche für den Obst- und Gemüsegroßmarkt in Hammerbrook sowie eine Fleischgroßmarkthalle im Zentralschlachthof.

In diesem Zusammenhang verdient auch die maßgebliche Mitwirkung Havemanns beim gegenwärtigen U-Bahn-Neubau in Hamburg, insbesondere bei der Auffindung und Anwendung neuzeitlicher, rationeller Bauweisen, hervorgehoben zu werden.

Havemann hat die interessierten Kreise mit zahlreichen Veröffentlichungen in Fachzeitschriften aus seinem reichhaltigen Arbeitsgebiet erfreut. Er ließ aber auch gerne seine Mitarbeit zu Worte kommen, wenn es galt, über bemerkenswerte Bauwerke zu berichten.

Es dürfte ein beglückendes Gefühl für Havemann sein, auf der Höhe seines Lebens und Schaffens, gleichzeitig nach einer mehr als 30-jährigen erfolgreichen Tätigkeit bei der Baubehörde Hamburg sich so maßgeblich an der Verwirklichung der bedeutendsten Ingenieurbauten seiner Vaterstadt beteiligt zu sehen. Dieses gilt auch für die nächsten Jahre, in denen neue große Bauaufgaben vor Havemann bewältigt werden müssen. Soeben hat die Planung einer weiteren Brücke über die Norderelbe im Zuge der Umgehungsautobahn Bremen—Lübeck feste Formen angenommen. Zu diesem Projekt gehören insgesamt 28 Kunstbauten. Groß war der Kreis der Gratulanten, die dem verdienstvollen Fachmann und lieben Kollegen und Menschen Havemann, dessen Freizeit seine Familie, der Kunst und der Musik gehört, noch viele weitere gesunde, glückliche und erfolgreiche Jahre gewünscht haben.

W. Wolf



Wir fertigen

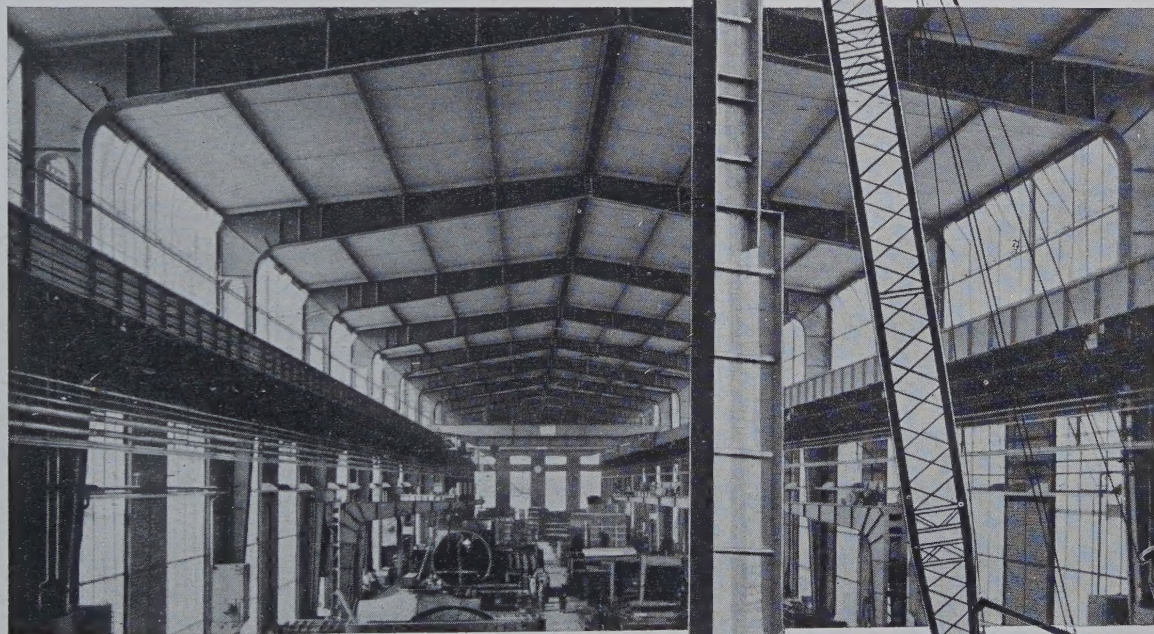
STAHLHOCHBAUTEN

aller Art wie:

INDUSTRIEBAUTEN: Stahlwerke
Walzwerke
Blechbearbeitungs-
werkstätten

HÜTTENWERKSANLAGEN: Hochofengerüste
Schrägaufzüge
Gießhallen
Maschinenhallen

Drahtseilbahnen · Gittermaste
Maschinenfundamente in Stahl



Moderne Werkstatthalle 130 x 22 m im Bergsenkungsgebiet
mit neuzeitlichen Bergschädensicherungen



GUTEHOFFNUNGSHÜTTE

STERKRADE AKTIENGESELLSCHAFT · WERK STERKRADE

STELLENANGEBOTE

HUMBOLDT
*sucht***für den Stahlhoch-, Brücken- u. Behälterbau****einen Betriebsleiter**

zum baldigen Eintritt.

Die Bewerber müssen neben der entsprechenden Berufserfahrung umfassende Kenntnisse auf dem Gebiet der Schweißtechnik sowie im Akkord- und Terminwesen (Refa) besitzen.

Herren, die in ähnlicher Stellung mit Erfolg tätig gewesen sind, werden um ihre Bewerbung unter Beifügung eines handschriftlichen Lebenslaufes, von Zeugnisabschriften bzw. -fotokopien, eines Lichtbildes und unter Angabe der Gehaltswünsche sowie des frühesten Eintrittstermines gebeten.

KLÖCKNER-HUMBOLDT-DEUTZ
AKTIENGESELLSCHAFT

PERSONALVERWALTUNG · ANGESTELLTENABTEILUNG · KÖLN-DEUTZ

Stahlbauanstalt im
Kölner Raum sucht
Diplom-Ingenieure
als

Statiker

Verlangt werden gute
statische und konstruktive Kenntnisse.
Jüngeren Herren wird
Gelegenheit zur Einarbeitung geboten.

Ausführliche Bewerbungen mit Lebenslauf, Lichtbild und Gehaltswünschen unter
Nr. 20 356 an die
Anzeigenabteilung
DER STAHLBAU,
Berlin-Wilmersdorf,
Hohenzollerndamm 169

**PHOENIX-RHEINROHR AG**
Vereinigte Hütten- und Röhrenwerke
Düsseldorf

sucht für die Neubauabteilung seines Werkes
Thyssen in Mülheim-Ruhr mehrere

Stahlbaukonstrukteure

für Stahlhochbau und für interessante Aufgaben
auf dem Gebiet der elektrisch geschweißten Stahlkonstruktion.

Wir erbitten ausführliche Bewerbungen mit Lebenslauf, Lichtbild, Zeugnisabschriften sowie Angaben über Gehaltsansprüche und des frühesten Eintrittstermins.

Gut eingeführte stahlverarbeitende Firma
Nähe Düsseldorf

s u c h t für Büro und Außendienst

erstklassigen Ingenieur
aus dem Brückenbaufach

mit guter Erfahrung in statischen Berechnungen.

Angebote unter 20 304 an die Anzeigenabteilung DER STAHLBAU, Berlin-Wilmersdorf, Hohenzollerndamm 169

Führendes Unternehmen im Bau von Wasserkraftanlagen sucht

1. Konstrukteur für Stahlwasserbau

mit mehrjähriger Erfahrung in Konstruktion und Statik von Wehrverschlüssen. Besondere Kenntnisse im Bau von automatischen Wehren sind erwünscht, jedoch nicht Bedingung. Nach gründlicher Einarbeitung soll der Gesuchte die Führung unserer Gruppe Stahlwasserbau übernehmen.

Wir bieten leistungsgerechte Bezahlung, angenehmes Betriebsklima und Hilfe bei der Wohnraumbeschaffung.

Bewerbungen sind mit den üblichen Unterlagen (Lichtbild, handgeschriebenem Lebenslauf und Zeugnisabschriften) unter Nr. 20 355 an die Anzeigenabteilung DER STAHLBAU, Berlin-Wilmersdorf, Hohenzollerndamm 169, zu richten.



ARCOS

ARCOS-AACHEN

Gesellschaft für Schweißtechnik m. b. H.
Jülicher Str. 122/134 · Tel. 3 48 41/42 u. 2 19 41/43 · FS. 832 701

- Schweiß-Elektroden**
für alle Schweißarbeiten
- Hohl-Elektroden**
für Sauerstoff-Lichtbogen-Schneiden
- Netzmantel-Elektroden**
für Automaten-Schweißung
- Autogen-Falzdrähte**
für NE-Metalle
- Schweißtransformatoren**
zwischen 20-1000 Ampere
- Schweißgleichrichter**
zwischen 30-1000 Ampere
- Schweißautomaten**
für Netzmantel-, UP- und ARCOS-CO₂-Schweißung
- Schweißpulver**
- Balance-Positioner**
- Schweißerausrüstungen**



Abdeckroste
stabil
trittsicher

STEINHAUS
GMBH · MÜLHEIM (RUHR) · SPELDORF

FISTA ELASTIC liefert:



PLASTIC Markisen
(GESCHÜTZTE AUSFÜHRUNG)

- Balkon- u. Terrassenmarkisen
- Strassenmarkisen
- Balkonschürzen
- Starrdach-Markisen

vorbeicht schmutzabweisend fäulnisfrei transparent

FISTA-ELASTIC DÜSSELDORF 10
RUF 33 58 33

ANZEIGEN  **stets im Blickfeld**
in „DER STAHLBAU“ der Auftraggeber

VERMIETUNGEN

Wir haben laufend mehrere

Autokräne

für Montage- und sonstige Kranarbeiten in allen gewünschten Kapazitäten

zu vermieten.

Erfassungs- und Verkaufsgesellschaft m. b. H.,
Gießen (Lahn), Friedrichstraße 25,
Telefon: 46 51, FS-Nr. 0482-866

Fabrikfliess

für jeden Verwendungszweck aus unserem reichhaltigen Programm:

Fliess kalkbasierte Elektroden

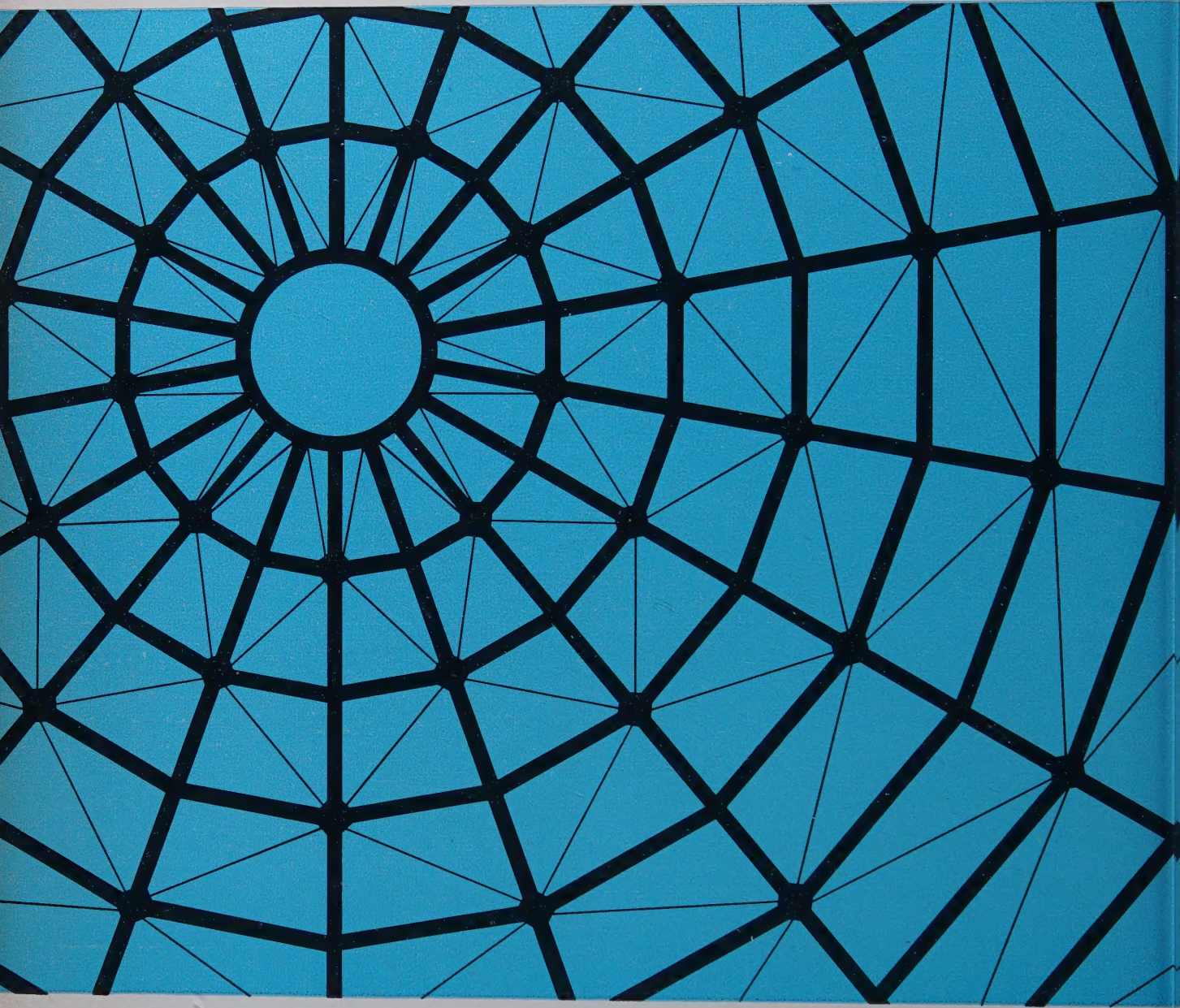
Fliess UP-Schweißdraht 0,5–3% Mn
für Automaten-Schweißung

Fliess Autogenschweißdraht für Eisen, Kupfer,
Bronze, Aluminium usw.

Fordern Sie bitte Prospekte an
HERMANN FLIESS & CO. DUISBURG



RÖCHLING



Wir liefern für den Stahlbau :
Stabeisen, Formeisen, Breitflanschträger,
Bänder, Walzdraht, Oberbaumaterial,
Torstahl, Noristahl.

RÖCHLING'SCHE EISEN- UND STAHLWERKE GMBH VÖLKLINGEN-SAAR